МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

VII

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1966

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

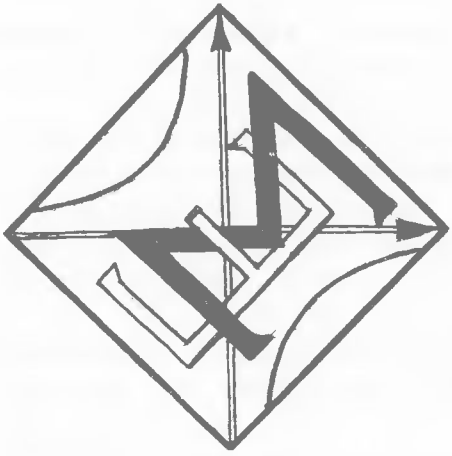
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК
Р С Ф С Р

М А Т Е М А Т И Ч Е С К А Я Ш К О Л А

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

У П



Издательство Московского Университета

1966

В сборниках "Математическая школа" публикуются материалы преподавания математики в специализированных математических школах (Московские школы№ 2, 7, 444; школа-интернат №18 при МГУ) и в Вечерней математической школе при механико-математическом факультете МГУ. Материалы имеют экспериментальный характер. Руководит изданием редакционный совет в составе :

Э.Б.ВИНБЕРГ, Е.Б.ДЫНКИН (редактор),А.А.ЕГОРОВ,С.А.МОЛЧАНОВ (зам.редактора),С.И.ШВАРЦБУРД,И.М.ЯГЛОМ

ОГЛАВЛЕНИЕ

В ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ

Вечерняя математическая школа 4

План лекций на второй семестр 1965-66 уч.г. 5-6

КОНКУРС ВМШ

Новые задачи 7-9

Итоги конкурса (I цикл)

7-е классы (С.А.МОЛЧАНОВ,И.М.ЯГЛОМ) 10-24

8-е классы (С.А.МОЛЧАНОВ,В.М.ФИШМАН) 25-32

9-11-е классы (С.В.ОВЧИННИКОВ,А.К.ТОЛПЫГО) 33-39

ЛЕКЦИИ ВМШ

С.Г.ГИНДИКИН, Алгебра логики 40-43

В.И.ЛЕВИН, Основные неравенства 44-46

А.Н.ШИРЯЕВ, Об оптимальном выборе момента остановки 47-56

В ШКОЛЕ № 2

О.В.ЛОКУЦИЕВСКИЙ,Семинарские занятия в 7-х классах 57-58

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ В ДЕВЯТЫХ КЛАССАХ

Э.Б.ВИНБЕРГ, Непрерывные функции 59-67

Контрольные задачи 68-70

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ В ДЕСЯТЫХ КЛАССАХ

Тема 3.Линейные операторы; кривые,поверхности и гиперповерхности второго порядка

Контрольные задачи (Продолжение) 71-74

Задачи для зачета 75-76

В ШКОЛЕ № 7

Н.Н.КОНСТАНТИНОВ, В математических классах 7 школы

Задачи по теме "Комплексные числа" 77-86

В ШКОЛЕ-ИНТЕРНАТЕ № 18

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ В ДЕВЯТЫХ КЛАССАХ

А.Б.СОСИНСКИЙ,Логарифмическая и показательная функции 87-90

Сказка о прекрасной Резольвенте,о трех добрых молодцах и о злом волшебнике Иван дер Монде... 6 и.т.д

ВЕЧЕРНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА.

Вечерняя математическая школа при механико-математическом факультете МГУ рассчитана на учеников 7-II классов московских школ, проявляющих склонности к серьезным занятиям математикой. Задача школы не в том, чтобы сообщить ученикам определенный запас сведений, а в том, чтобы способствовать их общему математическому развитию и дать им почувствовать, что такое математика как наука.

Включиться в работу школы можно и в середине учебного года. Вход на все занятия свободный.

Лекции в ВМШ читаются с I6 до I8 часов в аудитории 02 главного здания МГУ на Ленинских горах отдельно для 8-х классов (по вторникам) и для 9-II классов (по пятницам). Иногда это бывают отдельные лекции, иногда небольшие циклы. Разные циклы почти не связаны между собой и могут слушаться независимо.

На групповых занятиях решаются разнообразные задачи. Занятиями руководят студенты МГУ. В руководстве группами 7-х и 8-х классов принимают участие также наиболее сильные старшеклассники специализированных математических школ.

Групповые занятия происходят в помещении школы № 2 (Ленинский просп. д.58а): для 7-х классов по субботам с I6 до I9 часов; для 8-х классов по вторникам с I8 час .I5 мин. до 20 час. I5 мин. Во втором семестре занятия возобновляются с I2 февраля для 7 классов и с 8 февраля для 8-х классов. После 7 февраля возобновят также работу группы для 9-II классов.

Справки о работе ВМШ даются по телефону АВ 7-I7-69.

ПЛАН ЛЕКЦИЙ ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ НА ВТОРОЙ СЕМЕСТР 1965-66 уч.года

8-ые классы

18 января

доктор физ-мат.наук, профессор В.И.ЛЕВИН (МГПИ)

НЕРАВЕНСТВА

25 января

доктор физ-мат.наук, профессор С.В.ФОМИН (МГУ)

ПОНЯТИЕ ГРУППЫ В МАТЕМАТИКЕ

8, 15, 22 февраля и 1 марта

кандидат физ-мат.наук, ст.научн.сотр.МГУ

С.Г.ГИНДИКИН

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

15 и 22 марта

кандидат физ-мат.наук Н.Б. ВАСИЛЬЕВ (МГУ)

ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА

9 - 11 классы

14 и 21 января

кандидат физ-мат.наук, ст.научн.сотр. Института математики Академии Наук СССР А.Н.ШИРЯЕВ

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ МОМЕНТА ОСТАНОВКИ

28 января и 4 февраля

кандидат физ-мат.наук, ст.научн.сотр.Института математики Академии Наук СССР Э.Э.ШНОЛЬ

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ

II и I8 февраля

доктор физ.-мат.наук И.Г.БАШМАКОВА (МГУ)

ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА И ЕЕ РОЛЬ В ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

24 февраля и 4 марта

доктор физ.-мат.наук, профессор Ю.В.ПРОХОРОВ (МГУ)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЕШЕНИЙ

II и I8 марта

доктор физ.-мат.наук ,профессор А.А.КИРИЛЛОВ (МГУ)

СИММЕТРИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

25 марта

академик П.С.АЛЕКСАНДРОВ (МГУ)

О НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОПРОСАХ ТОПОЛОГИИ.

СКАЗКА О ПРЕКРАСНОЙ РЕЗОЛЬВЕНТЕ, О ТРЕХ ДОБРЫХ МОЛОДЦАХ И О ЗЛОМ ВОЛШЕБНИКЕ ИВАН ДЕР МОНДЕ

(Как три вектора один детерминант в нуль обратили)

Как идут две параллели,да не сходятся...
Как стоят два перпендикуляра,да не наклонятся... (Из старинной песни)

В некотором пространстве,в некотором подпространстве жило-было упорядоченное семейство ортонормированных векторов i_1, i_2, i_3 .Не было у них ни собственных чисел,ни собственных значений,жили они в чем мать-матрица родила.Из периода в период,от $-\pi$ до $+\pi$ гнули братья спины на базисе богатого комплекса, эксплуататора-тунеядца,прожившего всю свою жизнь по принципу наименьшего действия.Не взлюбили их комплекс и начал вытворять над ними свои комплексные штучки: то одну координату отобьет,то другую.Собрались братья,стали совет держать: "Не будет нам житья от этого комплекса.Нет на него никаких ограничений." И решили они обойти все пространства и подпространства,все оболочки и многообразия и найти правую систему координат. (См.продолжение на стр.24)

КОНКУРС ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

Вечерняя математическая школа проводит конкурс по решению задач. Задачи не требуют никаких знаний, выходящих за рамки школьной программы. Участвовать в конкурсе могут все школьники 7-II классов. Конкурсные задачи сообщаются на групповых занятиях ВМШ, вывешиваются на стендах в главном здании МГУ (около ауд. 02) и в школе № 2 и публикуются в сборниках "Математическая школа". Решения следует представлять в письменном виде руководителям групп ВМШ или присылать по адресу: Москва В-234, МГУ, мех.мат. факультет, к.I2-22, ВМШ, И.В.Гирсанову (для 7 и 8 классов) или С.В.Овчинникову (для 9-II классов).

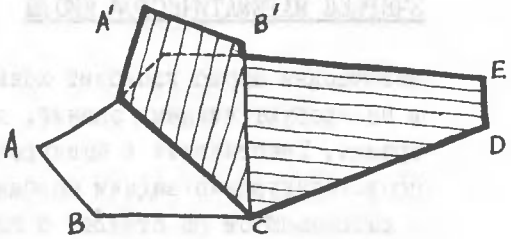
В настоящем сборнике печатаются итоги конкурса по первому циклу задач (задачи I-25). Второй цикл включает задачи 26-50. Срок представления решений - I5 февраля I966 года. Задачи 26-35 были опубликованы в сборнике № 4-5 , а задачи 36-44 в сборнике № 6. Приводим формулировки задач 45-50.

7-ые классы

45. В автобусе без кондуктора ехало 20 человек. Хотя у них были только монеты достоинством в I0, I5 и 20 копеек, каждый из них расплатился за проезд и получил причитающуюся ему сдачу. Как это могло случиться ? Докажите, что у них было не менее 25 монет.

46. Внутри квадрата задано n точек. Будем соединять эти точки отрезками между собой и с вершинами квадрата так, чтобы никакие два отрезка не пересекались, до тех пор, пока это возможно. Сколько всего отрезков будет проведено ?

47. Многоугольник, вырезанный из бумаги, перегибается по некоторой прямой и обе половинки склеиваются. Может ли периметр полученного многоугольника быть больше периметра первоначального многоугольника ?



48. См.задачу 46 для 8-х классов.

49. Даны окружность C и точка A. Провести через A прямую, на которой окружность C высекает хорду данной длины.

50. См.задачу 50 для 8-х классов.

8-ые классы

45. См.задачу 45 для 7-х классов.

46. На двух деревьях вблизи дома на разной высоте вбиты два крюка. Концы бельевой веревки закреплены на этих крюках и веревка должна проходить через третий крюк, вбитый в угол дома. На какой высоте нужно вбить этот третий крюк, чтобы длина веревки была наименьшей?

47. Требуется расставить несколько слонов на шахматной доске так, чтобы все поля держались ими под угрозой и чтобы каждый слон был защищен другими. Какое наименьшее число слонов достаточно для этого ?

48. В городе 10 улиц параллельны и 10 других пересекают их под прямым углом. Какое наименьшее число поворотов может иметь замкнутый путь, проходящий через все перекрестки?

49. Доказать, что при любом натуральном значении k ,

большем единицы, число k^4+4 является составным.

50. На доске было написано пять чисел. Сложив их попарно, получили следующие десять чисел: 0,2,4,4,6,8,9,11,13,15. Какие пять чисел были написаны на доске ?

9-11-ые классы

45. Доказать, что в любой бесконечной арифметической прогрессии найдется член, десятичная запись которого начинается с цифры 1.

46. Какое наибольшее число плоскостей симметрии может иметь пространственная фигура, состоящая из трех непарал - лельных прямых?

47. Сколькими различными способами можно разделить 25 копеек между четырьмя школьниками ? (Два способа считаются различными, если при них хотя бы один из школьников полу - чает разные суммы денег.)

48. Доказать, что сумма квадратов сторон выпуклого четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей плюс учетверенный квадрат расстояния между серединами диагоналей.

49. Построить семейство замкнутых отрезков, принадлежащих единичному кругу и таких, что каждая точка этого круга (включая граничные точки) принадлежит одному и только одному отрезку . (Точка отрезком не считается).

50. На маленьком острове стоит прожектор, луч которого освещает отрезок поверхности моря длины 1 км,, Прожектор равномерно вращается вокруг вертикальной оси, совершая один оборот за 1 минуту. Катер, который может двигаться со скоростью C , должен подойти к острову, не попав в луч прожектора. При каком наименьшем значении C это возможно ?

ИТОГИ КОНКУРСА ВМШ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

7-е классы . I цикл.

С.А.МОЛЧАНОВ, И.М.ЯГЛОМ

Конкурс проводился следующим образом. Решение каждой задачи оценивалось по довольно сложной "шестибальной" системе:

$+!$ ($1\frac{1}{4}$ очка) - полное решение, содержащее неожиданные красивые идеи;

$+$ (1 очко) - полное решение задачи;

$\dot{+}$ ($\frac{7}{8}$ очка) - решение, содержащее несущественные неточности;

$\pm$ ($\frac{3}{4}$ очка) - неполное решение;

$\mp$ ($\frac{1}{4}$ очка) - задача не решена, однако в работе имеются правильные идеи, которые могут быть доведены до решения задачи;

$-$ (0 очков) - задача не решена.

Школьникам, набравшим не менее I5 очков , присуждалась I-я премия; от I2 до I5 очков - 2-я премия; от I0 до I2 очков - 3-я премия; от 8 до I0 очков - 4 премия. Наибольшее число очков набрал Саша Шокуров ($16\frac{5}{8}$ очков).

Недостатком такой системы присуждения премий явилось то, что при этом не учитывалась степень трудности задачи. Впрочем, в двух случаях жюри сочло целесообразным присудить учащемуся более высокую премию, чем ту, на которую он мог претендовать в силу набранной им суммы очков, учитывая трудность решенных им задач (трудность задачи оценивалась количеством правильных ее решений).

Следует сказать несколько слов по поводу оформления работ. К сожалению, во многих работах имеются грубые орфографические ошибки- при учете очков эти ошибки не учитывались,

x) Материалы для общей части статьи подготовлены А.Барилем, О.Дынкиной и А.Орловым.

но ведь работу-то они все равно не украшают. Так в одной из работ было обнаружено II ошибок такого типа: "напробуем", "изходит", "соединина", "будет сводится" и т.д. и ,кроме того, II достаточно грубых синтаксических ошибок. Почти все участники конкурса слово " ломаная " почему-то писали через два "н". Затрудняло работу жюри также то обстоятельство,что многие школьники либо вовсе не указывали номера задач, либо указывали их неправильно. Мы очень советуем вам, ребята, после того, как вы написали решение задачи, еще раз внимательно перечесть его.

Приятно отметить, что к концу конкурса число представляемых участниками правильных решений увеличилось. Проводившийся в период окончания конкурса зачет также показывает,что многие ребята, не добившиеся успехов на этом первом конкурсе, могут работать очень хорошо, так что они, видимо, лишь не приложили достаточных усилий.

Сейчас уже приближается к концу и второй конкурс на решение задач . Желаем вам всем успеха.

ИТОГИ КОНКУРСА ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

В конкурсе принимало участие I60 человек. Распределение их по группам дается следующей таблицей

A	B	C	Д	E	F	G
23	3I	I9	24	I9	24	20

В следующей таблице указывается,сколько человек решило каждую из задач.В верхней строке указан номер задачи,в следующих трех строчках - числа решений,оцененных знаками +, ± и ∓ .*/

*/ Приведенные здесь данные,к сожалению, не совсем полны: отсутствуют ряд данных по группе "E".

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
+	6	7	19	2	37	30	10	52	2	1	17	1
±	2	3	2	0	3	0	4	6	1	0	10	1
∓	8	5	3	5	2	3	0	4	8	3	2	4

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
7	8	45	17	26	32	19	38	2	7	26	16	51
3	5	6	4	5	8	13	3	2	7	5	8	1
4	7	4	3	5	3	2	2	1	4	1	4	2

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА

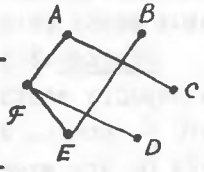
I премии –	ШОКУРОВ Александр	2 шк., группа А
	КУЛИКОВ Виктор	750 шк., группа Д
	КУЛАКОВ Александр	150 шк., группа F
	ФЕЙГИН Борис	29 шк., группа С
II премии –	ЗЕЛЕВИНСКИЙ Андрей	2 шк., группа А
	ГУРВИЧ Владимир	2 шк., группа А
	КАМЕНСКИЙ Алексей	29 шк., группа С
	ЧЕРНОУЦАН Алексей	2 шк., группа А
	ГАВРИКОВ Михаил	2 шк., группа А
III премии –	СНИСАРЕНКО Леонид	150 шк., группа F
	ШЕХТМАН Валентин	22 шк., группа G
	ПОЛОЦКИЙ Владимир	10 шк., группа В
	СОБОЛЕВ Геннадий	2 шк., группа А
IУ премии –	ПУХОВ Алексей	396 шк., группа В
	СТРИЖЕВСКАЯ Наташа	12 шк., группа В
	БАРОНОВ Василий	2 шк., группа А
	ПЕТУХОВ Владимир	203 шк., группа Е

ЗАДАЧА№I. Доказать, что в любой группе из 6 школьников всегда имеется либо трое школьников, которые все знакомы друг с другом, либо трое школьников, никакие два из которых не знакомы между собой.

РЕШЕНИЕ. Пусть А – один из наших шести учеников. Если А знаком не более чем с двумя учениками из нашей группы учеников, то в группе имеются три ученика, незнакомых с А.Если все эти ученики знакомы друг с другом, то они уже образуют тройку попарно знакомых учеников; если же какие-либо два из них не знакомы друг с другом, то они вместе с А составляют тройку учащихся, никакие два из которых не знакомы.

Остается рассмотреть случай, когда А знаком более чем с двумя учениками. В таком олучае найдутся три ученика, с которыми А знаком. Если никакие двое из этих трех учеников не знакомы друг с другом, то мы уже имеем тройку попарно незнакомых учащихся. Если же какие-либо два из этих трех учеников знакомы, то вместе с А они образуют тройку попарно знакомых учеников.

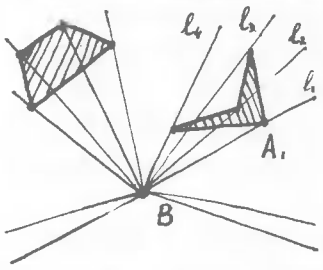
Этому решению, которое примерно в таком виде приводилось большинством решивших задачу участников конкурса, можно придать изящную "геометрическую" форму (чего, однако, не сделал ни один из участников конкурса). Сопоставим шести учащимся шесть точек А, В, С, Д, Е, F на плоскости; далее условимся соединять две точки отрезком в том и только в том случае, если соответствующие учащиеся знакомы между собой. Мы получим сеть линий, подобную изображенной на рисунке (в математике такая сеть линий называется "графом"). Нам надо доказать, что наш "граф" либо содержит треугольник, три вершины которого обозначают трех попарно знакомых между собой учащихся, либо же содержит три точки, никакие две из которых не соединены. Ну а далее можно рассуждать как выше, различая случай, когда из фиксированной



вершины А графа исходит не более двух отрезков, и случай, когда из этой вершины исходит три или более отрезков. Проведение всех рассуждений до конца (с ссылкой на чертеж !) мы предоставляем выполнить вам самостоятельно.

2. На плоскости даны 4000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что можно найти 1000 непересекающихся четырехугольников с вершинами в этих точках.

РЕШЕНИЕ. Обозначим данные точки $A_1, A_2, \ldots, A_{4000}$. Проведем прямые, проходящие через всевозможные пары точек A_i, A_j и выберем точку B , не лежащую ни на одной из этих прямых. Рассмотрим лучи, соединяющие точку B с точками $A_1, A_2, \ldots, A_{4000}$ Никакие два из них не совпадают. Занумеруем лучи по часовой стрелке, начиная , скажем, с луча BA_1 : $l_1, l_2, \ldots, l_{4000}$. Разобьем лучи на группы по четыре (l_1, l_2, l_3, l_4), $(l_5, l_6, l_7, l_8), \ldots,$ $(l_{3997}, l_{3998}, l_{3999}, l_{4000})$.



Очевидно, четырехугольники с вершинами, лежащими на лучах какой-то одной группы не пересекаются.

ЗАДАЧА № 3. Имеется 10 мешков монет. В девяти мешках монеты настоящие (весят 10 г), а в одном мешке все монеты фальшивые (весят 11 г.) Одним взвешиванием определить в каком мешке фальшивые монеты.

Решение.Занумеруем мешки числами от 1 до 10 . Возьмем из первого мешка одну монету, из второго - две ,... из десятого - десять, и определим их общий вес. Пускай он равен Р. Если бы все монеты были настоящие , то они весили бы 1+2 +...+10 = 55 г. Избыток Р-55 совпадает ,очевидно, с номером мешка , в котором хранятся фальшивые монеты.

ЗАДАЧА 4. Пусть k – число делителей числа n. Доказать, что $k^2 < 4n$.

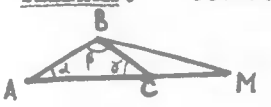
РЕШЕНИЕ. Разобьем множество всех делителей целого положительного числа n на пары, объединив в пару делители d_1 и $d_2 = \frac{n}{d_1}$; если при этом $d_1 < d_2$, то делитель d_1 мы будем называть "первым", а делитель d_2 – "вторым". При этом, если число n является полным квадратом: $n = d^2$, то делитель d нельзя будет объединить таким образом ни с каким другим, поскольку в этом случае $n/d = d$; такой делитель мы тоже назовем "первым", запомнив, однако, что ему не соответствует никакой "второй" делитель. Ясно, что каждый из "первых" делителей не превосходит числа $\sqrt{n}$ (ибо поскольку $d_2 = \frac{n}{d_1} \geqslant d_1$, то $d_1^2 \leqslant d_1 \cdot d_2 = n$); а так как все эти делители – числа целые, то общее их число не превосходит $\sqrt{n}$. А если общее число "первых" делителей не превосходит $\sqrt{n}$, то общее число всех делителей $\leqslant 2\sqrt{n}$. Более того, можно даже утверждать, что общее число k всех делителей числа n строго меньше $2\sqrt{n}$. В самом деле, если наибольший из "первых" делителей" равен $\sqrt{n}$, то этому делителю не соответствует "второй" в противном же случае число "первых" делителей строго меньше $\sqrt{n}$ и общее число всех делителей строго меньше $2\sqrt{n}$.

Но раз число k делителей меньше $2\sqrt{n}$, то $k^2 < 4n$.

Эта, как нам первоначально казалось, не очень трудная задача почему-то получила весьма мало правильных решений.

ЗАДАЧА № 5. На продолжении наибольшей стороны в треугольнике AC ($\triangle ABC$) отложен отрезок $CM = BC$. Доказать, что $\angle ABM$ тупой.

РЕШЕНИЕ. Обозначим углы треугольника α, β и γ, соответственно. По условию, $\beta > \alpha$ и $\beta > \gamma$.



Но $\angle CBM = \angle CMB = \beta/2$. Поэтому $\angle ABM = \beta + \gamma/2$. С другой стороны, $\alpha + \beta + \gamma =$

$= (\beta + \gamma/2) + (\alpha + \gamma/2) = 180^\circ$.Так как $\beta +$ $+ \gamma/2 > \alpha + \gamma/2$, то $\beta + \gamma/2 > 90^\circ$, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА № 6. Дана дробь $\frac{2x+3}{5x+7}$.При каких целых x эта дробь сократима ?

РЕШЕНИЕ. Если бы дробь $\frac{2x+3}{5x+7}$ была сократима при каком-то целом x , то была бы сократима и дробь $\frac{5x+7}{2x+3} =$ $= 2 + \frac{x+1}{2x+3}$. Но тогда дробь $\frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$ - также сократима, откуда вытекает, что сократима и дробь $\frac{1}{x+1}$, а это невозможно. Итак, дробь $\frac{2x+3}{5x+7}$ не сократима ни при каком целом x.

ЗАДАЧА № 7. Дано 20 целых положительных не равных между собой чисел, меньших 70. Доказать, что среди их разностей найдутся 4 одинаковые.

РЕШЕНИЕ. Выпишем последовательно все наши 20 чисел, начиная с наименьшего числа a и кончая наибольшим числом A. Предположим, что среди разностей последовательных чисел нет четырех одинаковых; при этом, возможно, что три числа отличаются от предшествующего на I, три числа отличаются от предшествующего на 2, три числа отличаются от предшествующего на 3; три числа отличаются от предшествующего на 4; три числа отличаются от предшествующего на 5; три числа отличаются от предшествующего на 6 и (поскольку до сих пор мы перечислили I8 интервалов между соседними числами, что отвечает девятнадцати числам) одно число отличается от предшествующего на 7. Но даже в этом, безусловно самом выгодном нам с точки зрения желания сделать возможно меньшей разность между A и a, случае , эта разность равна:

$$A - a = 3(1+2+3+4+5+6) + 7 = 3 \cdot 21 + 7 = 70,$$

в то время как разность двух положительных чисел, меньших 70, будет заведомо меньше 70.

Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

ЗАДАЧА 8. Доказать, что для любого натурального n, $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120.

РЕШЕНИЕ. Нетрудно проверить, что $n^5 - 5n^3 + 4n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$. Из пяти последовательных целых чисел по крайней мере два четные, причем одно из них делится даже на 4. Кроме того, найдется число, которое делится на 3 и число, которое делится на 5. Поэтому при любом натуральном n число $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ делится на $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

ЗАДАЧА № 9. Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари из двух враждующих станов, причем оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Доказать, что общее число рыцарей делится на 4.

РЕШЕНИЕ (Бориса Фейгина). Условимся обозначать рыцарей из одного и из другого стана знаками + и − и объединим в группы всех сидящих рядом рыцарей из одного стана. При этом мы придем к схеме, подобной той, какая изображена на рис. 1. Исключим теперь из рассмотрения всех рыцарей каждой группы, кроме последнего (считая рыцарей в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки). При этом мы придем к схеме рис. 2, на которой, очевидно, имеется одинаковое число рыцарей 1-го и 2-го стана, а следовательно общее число рыцарей четно. Но переход от рис. 1 к рис. 2 как раз и означает, что мы исключаем из рассмотрения всех рыцарей справа от которых сидит друг, оставляя лишь таких, справа

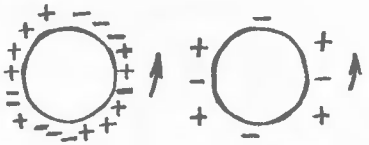


РИС. 1. РИС. 2.

от которых отдит враг. Согласно условию задачи число исключенных из рассмотрения рыцарей равно числу оставшихся ,т.е. оно тоже четно, но отсюда и вытекает, что общее число всех рыцарей делится на 4.

Эта задача, бесспорно, являлась труднейшей среди всех, фигурировавших на конкурсе.

ЗАДАЧА № 10. Дан произвольный треугольник. На каждой его стороне, по другую сторону от стороны, чем расположен сам треугольник, строится равносторонний треугольник. Доказать, что центры построенных треугольников сами образуют равносторонний треугольник.

РЕШЕНИЕ. Обозначим вершины построенных треугольников через A_1, B_1, C_1, а их центры - через a, b, c, как указано на чертеже. Заметим, что треугольники aBc и CBC_1 подобны (ибо $\angle aBc = \angle CBC_1 = 60° + \angle B$; $\frac{aB}{Bc} = \frac{CB}{BC_1}$), аналогично устанавливается, что подобны треугольники aCb и BCB_1. При этом коэффициенты подобия в обоих случаях одинаковы - они равны отношению радиуса вписанной в правильный треугольник окружности к его стороне. Следовательно,

$$\frac{ac}{CC_1} = \frac{ab}{BB_1}.$$

А так как $CC_1 = BB_1$ (это следует из почти очевидного равенства треугольников CAC_1 и B_1AB), то $ac = ab$.

Подобным же образом доказывается и равенство $cb = ab$.

Эта задача имеет и ряд других решений; она не казалась нам особенно трудной. Однако правильных решений она получила очень мало; быть может это свидетельствует о том, что школьники недостаточно внимания уделяют геометрическим задачам. (Заметим, что следовавшая за этой геометрическая задача -

задача II - хоть и получила довольно много правильных решений, почти ни у кого не имела полного исследования , выясняющего в каком случае решение задачи возможно).

ЗАДАЧА № I2. В городе Лиссе I0.000 телефонов ,номера которых задаются четырехзначными числами. В центральном районе установлено более половины всех телефонов. Доказать, что хотя бы один из номеров центральных телефонов равен сумме номеров двух других телефонов.

РЕШЕНИЕ. В центральном районе установлено не менее 500I телефона. Вычтем из всех номеров этих телефонов, кроме самого меньшего из них, этот самый меньший номер телефона; мы получим не менее 5 000 разностей. Все эти разности, разумеется ,различны; поэтому среди 5 000 (или больше) разностей номеров и 5 00I (или больше) номеров телефонов в центральном районе найдутся два одинаковых числа (ибо различных четырехзначных чисел, которые могут начинаться одним или несколькими нулями, имеется всего I0 000). Но если разность номеров B и A равна номеру C , то B = A+C.

ЗАДАЧА № I3. В квадрате со стороной I5 расположено 20 попарно непересекающихся квадратиков со стороной I. Доказать, что в большом квадрате можно поместить круг радиуса I так, чтобы он не пересекался ни с одним из малых квадратиков.

РЕШЕНИЕ. Если круг радиуса I целиком лежит внутри квадрата со стороной I5, то его центр удален от всех сторон квадрата не меньше, чем на I, т.е. он расположен внутри (концентрического с первым) квадрата со стороной I3; площадь этого квадрата равна $13^2 = 169$. Если круг радиуса I не пересекает квадрата со стороной I, то его центр удален от всех точек квадрата не меньше чем на I, но множество точек, удаленных хоть от одной точки квадрата со стороной I меньше чем на I представляет собой ограниченную отрезками прямых и дугами окружностей фигуру площади (см.рисунок):

$$1^2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{4}\pi 1^2 = 5 + \pi < 8,15$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\pi < 3$, I5).
Рассмотрим теперь все такие фигуры, отвечающие нашим 20 маленьким квадратикам; если они даже не пересекаются, то их общая площадь меньше, чем

$$20 \cdot 8,15 = 163$$

т.е. подавно меньше I69. Но это и значит, что найдется точка, расположенная внутри квадрата со стороной I3 и вне всех 20 рассматриваемых фигур. Круг радиуса I с центром в этой точке и будет удовлетворять условиям задачи.

ЗАДАЧА I5. Найти все трехзначные числа, которые в I2 раз больше суммы своих цифр.

Задача сводится к решению уравнения $100a + 10b + c = 12(a+b+c)$ в натуральных числах, не превосходящих I0. Ответ: $abc = 108$.

ЗАДАЧА I6. Доказать, что 23 октября I965 года в кинотеатре "Мир" на первом сеансе присутствовало минимум двое зрителей, имеющих среди сидящих в зале одинаковое число знакомых (известно, что в первом ряду сидело 5 человек).

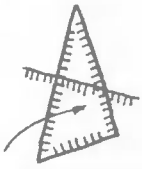
РЕШЕНИЕ. Допустим сначала, что нет ни одного зрителя, который ни с кем из сидящих в зале не знаком. Так как наибольшее число знакомств (для одного человека) не превосходит $k-1$, где k - число зрителей, а среди k чисел, заключенных между I и $(k-1)$ обязательно найдутся два совпадающих $(k \geq 2)$, то в этом случае обязательно найдутся двое зрителей, имеющих одинаковое число знакомств.

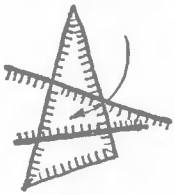
Если найдется человек ни с кем не знакомый, то наибольшее число знакомств не превоходит $k-2$, а среди k чисел, заключенных между 0 и $k-2$ $(k \geq 2)$, опять-таки найдутся два совпадающих.

Наконец, если есть двое человек, не имеющих знакомых, то они дают нужную пару.

Задача I7. Стороны треугольника заштрихованы изнутри. Треугольник пересекается несколькими прямыми, каждая из которых заштрихована с одной стороны. Доказать, что найдется многоугольник, все стороны которого заштрихованы изнутри.

РЕШЕНИЕ. Будем последовательно проводить наши прямые; убедимся, что каждый раз, когда мы проведем еще одну прямую, у нас попрежнему найдется на рисунке заштрихованный изнутри треугольник. В самом начале таким был исходный треугольник, если первая прямая не пересечет его, то он останется на чертеже и после ее проведения; если же она его пересечет, то достаточно будет взять ту из частей треугольника, которая расположена с заштрихованной стороны проведенной прямой/см.рис./. Проведем теперь 2-ю прямую: если она не пересечет имеющийся на чертеже заштрихованный изнутри многоугольник/треугольник или четырехугольник/, то им можно будет пользоваться и дальше; в противном же случае достаточно будет рассмотреть ту часть многоугольника, которая расположена с заштрихованной стороны проведенной / и пересекающей наш многоугольник/ прямой. Поступая так же после проведения каждой прямой, мы убедимся, что после проведения последней прямой на чертеже будет существовать заштрихованный изнутри многоугольник.





ЗАДАЧА I8. Доказать, что число, которое записывается 8I единицами, делится на 8I.

РЕШЕНИЕ.

$$\underbrace{11\ldots1}_{81\ раз} = 10^{80} + 10^{79} + \ldots + 1 =$$

$$= \underbrace{999\ldots}_{80\text{ раз}}9 + \underbrace{99\ldots}_{79\text{ раз}}9 + \ldots + 99 + 9 + 81 =$$

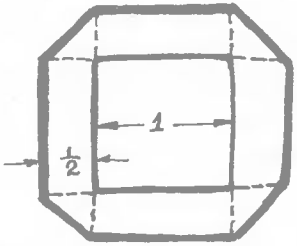
$$= 9\{\underbrace{1\ldots}_{80\text{ раз}}1 + \underbrace{11\ldots}_{79\text{ раз}}1 + \ldots + 11 + 1\} + 81.$$

Осталось показать, что число, стоящее в фигурных скобках, делится на 9. Для этого воспользуемся тем, что каждое число дает при делении на 9 тот же остаток, что и сумма его цифр. Поэтому остаток от деления на 9 числа $\underbrace{11\ldots}_{80\text{ раз}}1 + \underbrace{11\ldots}_{79}1 + \ldots + 11 + 1$ равен остатку от деления на 9 числа

$80 + 79 + \ldots + 2 + 1 = \frac{80 \cdot 81}{2}$,т.е. нулю.

ЗАДАЧА № 19.Дан квадрат со стороной I. Что представляет собой множество точек, сумма расстояний от которых до всех сторон квадрата равна 3 ?

Решение представлено на чертеже



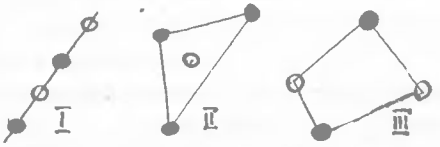
ЗАДАЧА № 20. На доске написано несколько плюсов и минусов.Разрешается стирать любые два знака,приписывая вместо одинаковых знаков плюс,а вместо разных минус.Доказать,что последний оставшийся на доске знак не зависит от того,в каком порядке стирать знаки.

РЕШЕНИЕ. Условимся писать вместо знака "+" число +I, а вместо знака "—" - число -I. При этом наша операция не будет, очевидно, менять произведения всех выписанных на доске чисел, так что последнее оставшееся число, независимо от того, в каком порядке мы стирали числа, будет равно произведению всех имевшихся в начале чисел.

ЗАДАЧА 2I. При каких n существует замкнутая самопересекающаяся ломаная из n звеньев, пересекающая каждое свое звено ровно один раз.

ЗАДАЧА 22. Доказать, что любые IO точек на плоскости можно разбить на две группы так, чтобы никакая прямая не отделяла одну группу от другой.

РЕШЕНИЕ. Выберем из наших точек произвольные четыре и докажем, что их уже можно разбить на две группы так, чтобы никакая прямая не отделяла одной группы от другой (оставшиеся 6 точек можно присоединить к любой из этих групп). В самом деле, 4 точки либо лежат на одной прямой , либо три из них образуют треугольник, внутри которого лежит четвертая точка, либо образуют выпуклый четырехугольник. Во всех случаях белые и черные точки означают на рисунках точки первой и второй групп.



ЗАДАЧА 24. Доказать, что если число делится на 99, то сумма его цифр не менее I8.

РЕШЕНИЕ. Раз число делится на II, то сумма цифр, стоящих на четных местах равна сумме цифр, отоящих на нечетных местах. Отсюда следует, что оумма всех цифр должна делится на 2. С другой стороны (признак делимости на 9) сумма цифр должна делиться на 9. Итак, сумма цифр любого числа , которое делится на 99, делится на I8 ,что ,очевидно, и решает задачу.

ЗАДАЧА 25. На шахматной доске, состоящей из 25х25 полей, расставлено 125 шашек, по пять шашек на каждой горизонтали. Известно, что расположение шашек симметрично относительно главной диагонали. Докажите, что хотя бы одна шашка находится на этой диагонали.

РЕШЕНИЕ. Пусть над главной диагональю расставлено k шашек, тогда (условие симметрии) под диагональю расположено тоже k шашек . Так как общее число шашек нечетно, то хотя бы одна из них стоит на главной диагонали.

Решения задач 14 и 23 будут даны в следующем выпуске.

Вышли они в чисто потенциальное поле и пошли шагом куда глаза глядят. π идут, 2π идут, 3π идут...Глядь: перед ними голубым разрезом на ровной комплексной плоскости струйное течение.

– А не половить ли нам рыбки? – молвил i_1 .

– Отчего же нет,– сказали братья.

Закинули братья свою видавшие виды ортогональную сеть. Видят – в сети сигма-рыба бьется,человечьим голосом просит:

– Не губите меня,добры молодцы.Я вам еще пригожусь!

Послушались ее братья,выпустили.А сами пошли дальше.

И полпериода не прошли,видят: лежит на траектории малый параметр,худущий-худущий,от голода плачет.Пожалели его братья, накормили его ядрами всвертку.Стал тут параметр расти на глазах.А как достиг экстремальной величины,сказал:

– Я еще вам пригожусь,добры молодцы!

Да пропал,будто и не было его вовсе.А братья дальше пошли.

Долго ли,коротко ли шли,больше нуля,меньше бесконечности, смотрят: стоит избушка на курьих ножках.

– Избушка-избушка,стань к нам плюсом,а к лесу минусом!

Попереминалась избушка с ноги на ногу,да и повернулась.Вошли братья и возрадовались: на столе еда стоит.Сытно поели и спрашивают:

– Есть тут кто? (См.продолжение на стр.32)

ИТОГИ КОНКУРСА ВМШ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

8 классы . I цикл.

С.А.МОЛЧАНОВ, В.М.ФИШМАН

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА

I премия	КОЛГИН Анатолий	400 шк.,	группа "В"
II премия	ЛЮСТИГ Татьяна	590 шк.,	группа "А"
II премия	РУМЯНЦЕВ Юрий	7 шк.,	группа "Д"
III премия	КАЛЯГИН Сергей	757 шк.,	группа "В"
III премия	БЫХОВСКАЯ Ирина		группа "С"
IУ премия	ЛЮСТИГ Ольга	590 шк.,	группа "А"
IУ премия	БИРЮКОВА Ирина	263 шк.,	группа "Д"
IУ премия	МИНЦ Александр	I6 шк.,	группа "А"

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

(условия см. в выпусках" математическая школа " I, II, III).

ЗАДАЧА I. См.решение задачи 7 для седьмых классов, приведенное в статье И.М.Яглома и С.А.Молчанова "Итоги конкурса ВМШ по решению задач. 7-е классы I цикл", которая напечатана в этом выпуске.

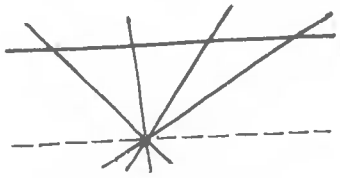
ЗАДАЧА 2. Примем за единицу времени полчаса. Обозначив число бактерий в момент n через u_n, получаем без большого труда рекуррентное соотношение

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

При этом $u_0 = 1$, $u_1 = 1$. Значит, последовательность u_n совпадает с рядом Фибоначчи (см. Н.Н.Воробьев, Числа Фибоначчи, изд. 2,"Наука", I964). Через T часов будет насчитываться u_{2T} бактерий.

ЗАДАЧА 3. К первоначальным K ящикам каждый заполненный ящик добавляет еще K ящиков . Так как заполнено M ящиков, то добавлено MK ящиков, а всего их - $M(K+1)$ ящик.

ЗАДАЧА № 4. Нетрудно видеть, что в двух точках могут пересекаться только 3 прямые (из которых 2 параллельны). Докажем, что $x \neq 2$ не удовлетворяет условиям задачи. Через одну точку можно провести сколько угодно прямых. Пусть $x>2$. Тогда расположим $x-1$ точку на какой-нибудь прямой, а последнюю точку - вне нее. Тогда через эти точки можно провести x или $x+1$ прямую, значит число прямых не определено однозначно . (Мышарев А., 7-ая школа).



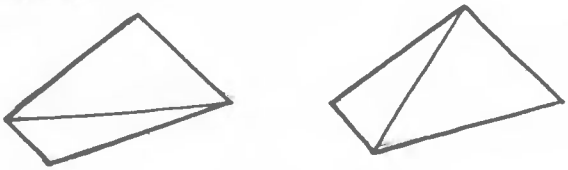
ЗАДАЧА № 5. В этой последовательности после каждых двух нечетных чисел идет одно четное. Рассмотрим 5 последовательных чисел a, b, c, d, e , причем числа b и e - четные, а числа a, c, d - нечетные. Имеем

$$e = cd+1 = (ab+1)(bc+1)+1 = ab^2c+b(a+c)+2.$$

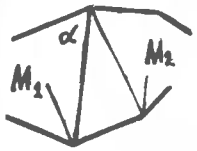
Число ab^2c - делится на 4, т.к. b - четное число; $b(a+c)$ - тоже делится, т.к. $a+c$ - четное число. Значит e при делении на 4 дает в остатке 2. Итак, мы доказали, что любое четное число в нашей последовательности не делится на 4, что и требовалось.

ЗАДАЧА № 6. Всего имеется 4×3×2×1 гирлянд.

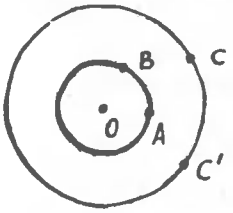
ЗАДАЧА № 7. Проведем доказательство по индукции. Для $n=4$ теорема очевидна: существует только два способа разбиения четырехугольника на треугольники непересекающимися диагоналями (см.рис.), при каждом из которых две вершины свободны.



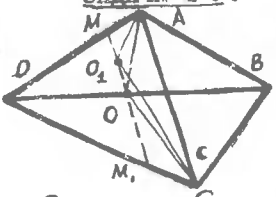
Допустим, что теорема верна для n - угольников. Рассмотрим выпуклый $(n+1)$- угольник и одну из диагоналей разбиения α. Эта диагональ делит многоугольник на два, для каждого из которых выполняется *предположение индукции*. Рассмотрим один из многоугольников, скажем, M_1. В нем имеется две свободные вершины, причем обе они могут прилегать к выделенной диагонали лишь в том случае, когда M_1 - треугольник. Значит, в M_1 всегда найдется по крайней мере одна свободная вершина, не прилежащая к диагонали α. Но такая вершина будет свободной и для исходного $(n+1)$ - угольника. Аналогичные расоуждения применимы и к M_2. Итак, в выпуклом $(n+1)$- угольнике найдется по крайней мере две вершины, через которые не проходят диагонали разбиения. Ссылка на принцип математической индукции завершает доказательство.



ЗАДАЧА № 8. Предположим, что можно закрасить плоскость красной, зеленой и синей краской так, что любые две точки, расстояние между которыми равно I, закрашены разным цветом. Пусть точка О- красная. Тогда окружность радиуса I с центром в т.О состоит из зеленых и синих точек. Пуоть точка А на ней - зеленая, тогда точка В той же окружности на расстоянии I от А должна быть синей. Построим точку С, удаленную от А и В на I (и отличную от О); она должна быть красной. Так как такое же построение мы можем проделать для любой точки C', лежащей на окружности с центром в точке О и радиусом ОС, то все точки этой окружности - красные. Но на этой окружности можно указать две точки, лежащие на расстоянии I друг от друга, что противоречит предположению. (Решение МинцаА., школа № 16).



ЗАДАЧА № 9.

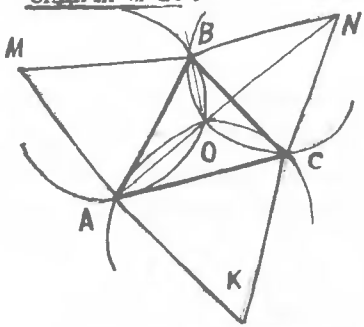


Искомым геометрическим местом точек является отрезок M_1M_2 прямой, проходящей через середину O диагонали DB параллельно AC, лежащий внутри четырехугольника. Действительно, для точки O получаем:

$S_{\Delta AOD} = S_{\Delta AOB}$; $S_{\Delta DOC} = S_{\Delta BOC}$;

складывая, получаем $S_{AOCD} = S_{AOCB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, что и требовалось. Пусть точка O' принадлежит нашему отрезку, тогда $S_{\Delta AO'C} = S_{\Delta AOC}$, значит $S_{AO'CD} = S_{AOCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{AO'CB}$, что и требовалось. Легко показать, что никакая другая точка плоскости не принадлежит геометрическому месту.

ЗАДАЧА № 10.



Так как каждая из дуг $\smile AB, \smile BC, \smile AC$, обращенных внутрь треугольника, вмещает угол 120^0, то все они пересекаются в точке O, из которой стороны треугольника видны под углом 120^0.

Проведем отрезки AO и ON. Очевидно, $\angle AOB = 120^0$. $\angle BON$ опирается на ту же дугу, что и $\angle BCN$, в окружности, описанной около ΔBNC и равен поэтому 60^0. Так как $\angle AOB + \angle BON = 120^0 + 60^0 = 180^0$, то точки A, O и N лежат на одной прямой. Аналогично доказывается, что отрезки CM и BK проходят через точку O.

ЗАДАЧА № 11. $\left(1000\frac{1}{3} + 1000\frac{2}{3}\right) + \left(1001\frac{1}{3} + 1001\frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(1999\frac{1}{3} + 1999\frac{2}{3}\right) = 2001 + 2003 + 2005 + \ldots + 3999 = 2000^2 - 1000^2 = 3\,000\,000.$

ЗАДАЧА № I2. Ответ: точки нужно расположить в вершинах правильного пятиугольника (единственное решение).

ЗАДАЧА № I3. Предположим, что за первый день ученик решил a_1 задач, за первые два – a_2, . . . за первые 77 дней (II недель) – a_{77} задач.

Рассмотрим числа

$$a_1, a_2, \ldots, a_{77};$$

$$a_1+20, a_2+20, \ldots, a_{77}+20.$$

Всего имеется I54 числа. Заметим, что a_{77} не больше, чем I2.II = I32 .Значит, все выписанные числа не превосходят I32+20 = I52, а поэтому среди них имеется два равных. Но числа первой строки все различны, а поэтому различны и числа второй строки. Поэтому при некоторых $k, \ell \le 77$

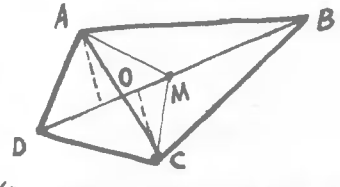
$$a_k = a_\ell + 20$$

или

$$a_k - a_\ell = 20.$$

(Колгин Анатолий, 400 шк.)

ЗАДАЧА № I4. Пусть $AO=OC$. Тогда искомой точкой будет середина диагонали ВД – точка М . Действительно,



$S_{\triangle AMD} = S_{\triangle AMB}$

и $S_{\triangle CMD} = S_{\triangle CMB}$.

Но $S_{\triangle AMD} = S_{\triangle CMD}$

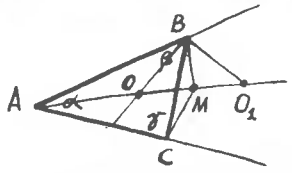
(у треугольников равны основания и высоты). Значит, все четыре площади совпадают, что и требовалось доказать.

Обратное утверждение также верно, его легко получить, используя решение задачи № 9 .

ЗАДАЧА № I5.

ответ: $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$

ЗАДАЧА № I7. Пусть O и O_1 центры вписанного и вневписанного кругов. Обозначим углы треугольника α, β и γ, соответственно. Легко понять, что $\angle OBO_1$ - прямой, а $\angle BOO_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$.



Пусть M - середина отрезка $O\,O_1$. Тогда ΔBOM - равнобедренный и $\angle BMO = \pi - 2\angle BOO_1 = \pi - (\alpha+\beta)$.

Аналогично можно показать, что $\angle AMC = \pi - (\alpha+\gamma)$, Значит, $\angle BAC + \angle BMC =$

$= \alpha + 2\pi - (2\alpha+\beta+\gamma) = 2\pi - (\alpha+\beta+\gamma) = \pi$,

откуда, по известной теореме, вытекает, что точки A, B, C и M лежат на одной окружности.

ЗАДАЧА № I8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ - данные k чисел. Образуем суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \ldots,$

$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$

и раосмотрим остатки от деления этих сумм на k : $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ соответственно. Так как $0 \le \beta_i \le k-1$, то среди чисел β_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ найдутся по крайней мере два равных (принцип Дирихле). Пуоть $\beta_\ell = \beta_m$ $(\ell > m)$. Тогда

$S_\ell - S_m = a_{m-1} + \ldots + a_\ell$ делится на k.

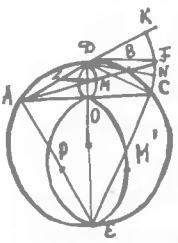
ЗАДАЧА № 20. Первому набору из 9 единиц обязательно предшествовал набор из 9 нулей. Набор из 9 нулей можно получить только в том случае, если предыдущий набор состоял из чередующихся 0 и I. Но 9 или вообще любое нечетное количеотво 0 и I нельзя расположить на окружности так, чтобы любые два соседних числа были различны.

ЗАДАЧА № 21. Докажем, что уравнение $x^2+5y=3z^2$ не разрешимо по модулю 5, т.е. не разрешимо сравнение $x^2 \equiv 3z^2 (mod 5)$. Мы будем считать, что x и z не делятся на 5, в противном случае на 5 делилось бы и y, и все уравнение можно было бы сократить на 25.

В таком случае x^2 сравнимо с 1 или 4 по модулю 5 при любом целом положительном x, а $3z^2 \equiv 3$ или $2 (mod 5)$, значит, сравнение $x^2 \equiv 3z^2 (mod 5)$ не разрешимо, а, следовательно, и уравнение $x^2+5y^2=3z^2$ не имеет решений в целых положительных числах.

ЗАДАЧА № 22. Пусть $f(7)=11$, $f(11)=13$. Тогда $f(11)-f(7)$ должно делиться на 11-7=4, но 13-11=2, а 2 не делится на 4. Значит, такого многочлена с целыми коэффициентами не существует.

ЗАДАЧА № 23. Определим сначала геометрическое место точек $\mathcal{F}$ таких, что $AB+BC=A\mathcal{F}$; где B - любая точка дуги ДС, а $\mathcal{F}$ лежит на прямой АВ.

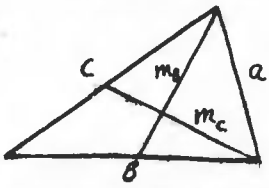


$\angle \mathcal{F}BC=\angle BAC+\angle BCA=\angle AEC$

$\angle NBC=\angle BDC+\angle BCD=\angle DEC$

Следовательно, $\angle \mathcal{F}BN=\angle NBC$, а так как $D\mathcal{F}=BC$, то $\triangle \mathcal{F}DN$ симметричен $\triangle CDN$, в частности $D\mathcal{F}=DC$. Значит, искомым геометрическим местом будет дуга $C\mathcal{F}K$ окружности с центром в точке D и радиусом ДС. Геометрическое место середин М ломаных АВС есть середина отрезков $A\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ лежит на построенной дуге $C\mathcal{F}K$. Значит, наше геометрическое место точек есть дуга ДМО окружности с центром в точке L - середине отрезка АД и радиусом LD. В наше геометрическое место входят еще дуга $OM'E$ с центром в середине Р дуги АЕ и дуги ОРЕ и $DL\,O$, симметричные дугам $OM'E$ и DMO относительно диаметра DE (Колгин А., ик. № 400).

ЗАДАЧА № 25. Пусть $m_b \perp m_c$. Тогда по теореме Пифагора получаем:



$$\begin{cases} 4/9\, m_c^2 + \frac{4}{9} m_b^2 = a^2 \\ 4/9\, m_c^2 + 1/9\, m_b^2 = b^2/4 \\ 1/9\, m_c^2 + 4/9\, m_b^2 = c^2/4. \end{cases}$$

Сложив два последние уравнения и умножив на 4/5, получим $b^2 + c^2 = 5a^2$, что и требовалось.

Решения задач I6, I9 и 24 будут помещены в следующем выпуске.

Слышат - из-под печки слабый голос доносится. Видит - лежит не то вектор, не то скаляр, цепными дробями закованный:

- Привет вам, благородные векторы! Я - добрый волшебник Ади-Аб-Ата-Коши-Мак-Лорен. Вот уж полжизни сижу и здесь. Заковала меня злая ∇ (Набла)-Яга...

Не успел он договорить - замумекало-засвистело вокруг. "Беким!" - вскричал Ади-Аб-Ата. Расковали его братья и пустились все вместе наутек. Оглянулись назад: летит по небу прекрасная Δ (Дельта). Ударилась о плоскость, встала на голову и обратилась в страшную ∇ -Ягу. "Чую, векторным духом пахнет!" Ан векторов и след простыл.

Вывел их Ади-Аб-Ата на геодезическую линию и сказал на прощание: "Спасибо, молодцы. Я вам еще пригожусь!" И пропал, аннулировался.

Прошли братья еще и увидели они $Div\,grad$, то-бишь дивный город. И выросли перед ними стены высокие, подобно тому, как растет $tg\,x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. И расходилось от города сияние лучистое, как расходится гармонический ряд. Но охватывала тот город печаль великая, как охватывает все решения дифференциального уравнения $y'' = k^2 y$ формула $y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$, где c_1 и c_2 - произвольные константы.

(См. продолжение на стр. 39)

ИТОГИ КОНКУРСА В М Ш ПО ДЕВЯТЫМ-ОДИННАДЦАТЫМ КЛАССАМ

С.В.ОВЧИННИКОВ, А.К.ТОЛПЫГО

Решения первого цикла задач (№№ I-25) представили 69 учеников 9-II классов Жюри в составе: С.Овчинников (председатель), Б.Писаревский и А.Толпыго отметило следующие работы.

Первая премия –	КОНСТАНТИН РОМЕНЕЦ	(2 шк., 9 кл.)
Вторые премии –	АЛЕКСАНДР ВАРЧЕНКО	(I8 шк.–инт., I0 кл.)
	МИХАИЛ МИХАЙЛОВ	(I60 шк., II кл.)
Третьи премии –	АНАТОЛИЙ ДУБИНСКИЙ	(444 шк., II кл.)
	АЛЕКСАНДР ЗАИМСКИХ	(I8 шк. –инт., I0 кл.)
	ЮРИЙ КИФЕР	(444 шк., II кл.)
	ВЯЧЕСЛАВ ШОКУРОВ	(2 шк., 9 кл.)

Похвальные отзывы – Светлана Гингольд и Галина Седова (Спшк4, 9 кл.)
Владимир Голубев (444 шк., II кл.)
Олег Игудисман (5 спшк., 11 кл.)
Андрей Мовчан (444 шк., II кл.)
Эльдар Мусаев (444 шк., I0 кл.)
Александр Романов (6 шк., II кл.)
Иван Чередник (2 шк., 9 кл.)
Михаил Фрумкин (2 шк., 9 кл.)

Работа Роменца выделяется не только большим числом решенных задач (20) , но и высокой культурой оформления решений . Среди присланных им решений только одно оказалось неверным. А.Варченко также решил 20 задач, но из-за большого числа неточностей, недоделок и небрежного оформления работы ему было решено присудить вторую премию. Михайлов решил I7 задач. Его работа производит очень хорошее впечатление

аккуратностью и математической грамотностью.

Третьи премии присуждались за 12-13, похвальные отзывы - за 7-10 правильно решенных задач.

С.Гингольд и Г.Седова работали совместно. Их работа отмечена похвальным отзывом. Следует подчеркнуть, что совместное участие в конкурсе двух или нескольких школьников является вполне допустимым, но нужно, чтобы соответствующие работы представлялись за подписями всех авторов. Не следует в этом случае представлять несколько копий работы за разными подписями, так как это только затрудняет работу жюри. К сожалению, многие учащиеся, решив несколько первых задач, затем переставали участвовать в конкурсе. Многие работы написаны крайне небрежно. Имеется работа, в которой из 10 присланных задач 9 (!) решено неверно; в нескольких работах на одну верно решенную задачу приходится по 2-3 неверно решенных. Иногда из-за небрежности авторов, было невозможно понять, решена задача или нет. Ясно, что в этих случаях решение не засчитывалось.

ОБЗОР РЕШЕНИЙ

Число участников конкурса, решивших каждую из задач, указано в следующей таблице:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
+	39	41	15	0	15	10	7	30	7	6
±	0	2	6	0	10	1	2	2	6	2
−	17	6	29	1	17	16	2	3	9	13

№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
+	0	8	10	9	15	1	3	8	2	0
±	3	4	0	0	1	1	0	0	1	4
−	7	5	2	5	0	0	3	1	4	0

№	21	22	23	24	25
+	5	7	9	10	0
±	1	1	2	1	0
−	0	1	2	3	0

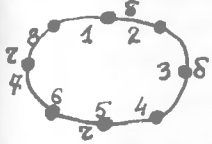
Задачи №№ 4, 11, 19, 20 и 25 не получили ни одного правильного решения.

Жюри предлагает всем участникам конкурса продолжить работу над этими задачами и присылать их решения вместе с решениями задач второго цикла.

Решения задач №№ 1-3 , 6-8 опубликованы в сборнике "Математическая школа" № 6. Мы приведем полные решения наиболее интересных из оставшихся задач и краткие указания к остальным задачам.

Задача 5. Занумеруем поля доски, как это указано на рисунке и расположим их по кругу. Каждый конь может делать ходы на один шаг вправо или влево по кругу. Перепрыгивать друг через друга они также не могут.

7	2	5
4		8
1	6	3



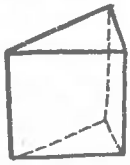
Поэтому кони будут вынуждены двигаться гуськом друг за другом. Из этого сразу следует утверждение задачи.

Задача 9. Положим кусочек картона каким-нибудь образом и разрежем мысленно наш лист бумаги вместе с этим кусочком картона по линейкам. Затем наложим эти кусочки один на другой. Поскольку площадь кусочка картона меньше I $см^2$,он не закроет хотя бы одну из точек квадрата. Отметим эту точку на всех сложенных квадратиках и разложим их по местам. Теперь на каждом квадратике имеется по точке, причем ни одна из них не покрыта картоном и все они образуют квадратную решетку на плоскости. Остается сдвинуть наш лист бума-

ги, не двигая кусочек картона, так, чтобы узлы сетки перешли в отмеченные точки.

Задача I0. Приведем два возможных расположения. Правильная треугольная призма, у которой сторона основания равна высоте.

I^0.



2^0. Правильный октаэдр.

Вопрос об описании всех таких расположений остается открытым.

Задача II. Было прислано много решений этой задачи, но все неверные.

Задача I2. Приводим ответ

$$\begin{array}{r} 775 \\ \times\ 33 \\ \hline 2325 \\ 2325 \\ \hline 25575 \end{array}$$

Задача I3. Наиболее простым здесь является аналитическое решение. Пусть координаты вершин шестиугольника (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_6, y_6)$. Тогда середины сторон имеют координаты

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right), \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right), \ldots, \left(\frac{x_6+x_1}{2}, \frac{y_6+y_1}{2}\right).$$

Используя известную формулу для координат центра тяжести треугольника, получим, что координаты обоих центров тяжести равны

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_6}{6}, \frac{y_1+y_2+\ldots+y_6}{6}\right).$$

Задача I4. Перегруппировав члены, получим

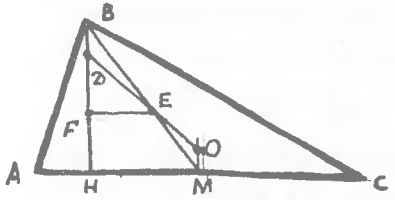
$$(x^{4k-2}-2x^{2k-1}+1)+(x^{4k-4}-2x^{2k-1}+x^2)+\ldots+$$
$$+(x^{2k}-2x^{2k-1}+x^{2k-2})=0,$$

или

$$(x^{2k-1}-1)^2+x^2(x^{2n-3}-1)+\ldots+x^{2k-2}(x-1)^2=0,$$

откуда очевидно, что единственный действительный корень равен I.

Задача I5. Простое решение этой задачи основано на теореме Эйлера, утверждающей, что в любом треугольнике точки пересечения медиан, высот и центр описанной окружности лежат на одной прямой.

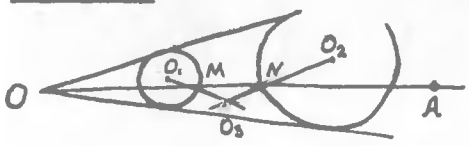


Для построения восставим к исходной прямой перпендикуляр, проходящий через точку пересечения высот D. Из точки пересечения медиан E проведем отрезок EF, параллельный исходной прямой. Теперь легко получить вершину B, отложив отрезок $BH=3FH$. Соединив B с E, получим середину M стороны AC. Воспользовавшись теоремой Эйлера, получаем центр O описанной окружности. Дальнейшее построение не представляет затруднений.

Задача I6. Эта задача была решена только Эльдаром Мусаевым при помощи векторной алгебры.

Ввиду громоздкости его решения мы не будем его приводить. Было бы хорошо, если бы кто-нибудь из участников конкурса нашел чисто геометрическое решение этой задачи.

Задача I7.



Проведем построение в случае внешнего касания. Пусть O центр гомотетии

наших окружностей. Соединяя точку A с точкой O, получим точки M и N. Центр искомой окружности есть точка O_3 пересечения прямых O_1M и O_2N. Доказательство и исследование приведенного построения не представляет затруднений.

Задача I8. Ответ:

$$a^{\lg\lg a/\lg a} = \lg a.$$

Задача I9. Никем полностью решена не была. Все участники конкурса нашли верное значение предела 10^{-5}, но доказательства существования предела никем дано не было.

Задача 20. Почему-то все участники конкурса искали минимум не выражения $MB+MC-MA$, а минимум суммы $MB+MC+MA$, что представляет собой хорошо известную задачу.

Задача 2I. Допустим, что $S_1 = x_1 + x_3 + \ldots + x_{99} < \frac{1}{2}$, тогда $S_2 = x_2 + x_4 + \ldots + x_{100} > 1/2$. Если $\frac{1}{2} - S_1 < \frac{1}{100}$, то задача решена. В противном случае прибавим к числу $S_1 = x_1 + \ldots + x_{99}$ число $x_2 - x_1$, которое по модулю меньше $1/50$. Если полученное число $x_2 + x_3 + \ldots + x_{99}$ не удовлетворяет условию задачи, прибавим к нему число $x_4 - x_3$ и так далее. На пятидесятом шаге мы получим число $S_2 = x_2 + \ldots + x_{100} > \frac{1}{2}$, поэтому на каком-то k-ом шаге мы получим число $x_2 + \ldots + x_{2k} + x_{2k+2} + \ldots + x_{99} < 1/2$, а на $k+1$-ом шаге число $x_2 + \ldots + x_{2k} + x_{2k+2} + x_{2k+3} + \ldots + x_{99} > \frac{1}{2}$.

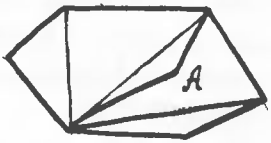
Так как разность этих чисел по модулю меньше $\frac{1}{50}$, то ясно, что одно из них отличается от I/2 меньше, чем на одну сотую.

Задача 22. Если точка Z лежит вне многоугольника с вершинами $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то числа $Z-C_1, \ldots, Z-C_n$ лежат по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат, т.е. существуют такие углы φ_1 и φ_2 $(\varphi_1 - \varphi_2 < \pi)$, что $\varphi_1 < \arg(Z-C_1) < \varphi_2; \ldots;$ $\varphi_1 < \arg(Z-C_n) < \varphi_2$. Поэтому $2\pi - \varphi_2 < \arg(Z-C_1)^{-1} <$

$< 2\pi - \varphi; \ldots; 2\pi - \varphi_2 < \arg(z - c_n)^{-1} < 2\pi - \varphi_1.$

Отсюда ясно, что $\frac{1}{z-c_1} + \ldots + \frac{1}{z-c_n} \neq 0.$

Задача 23. Рассмотрим выпуклый многоугольник наибольшей площади с вершинами в некоторых из наших точек. Тогда оставшиеся точки лежат внутри этого многоугольника (если бы одна из них была вне его, то можно было бы построить выпуклый многоугольник большей площади). Если внутри нашего многоугольника есть хотя бы одна из данных точек (назовем ее A) то, разбивая многоугольник диагоналями, выходящими из какой-либо вершины на треугольники, получим, что A попадет хотя бы в один из этих треугольников . Но тогда вершины треугольника, содержащего A вместе с точкой A , не образуют выпуклого четырехугольника.



Задача 24. Легко видеть, что из-за иррациональности числа α $\cos x + \cos \alpha x \neq 2$, если $x \neq 0$. С другой стороны, при $x = 0$ наше выражение равно двум. Отсюда следует утверждение задачи.

Проголодались братья,зашли в харчевню $\tilde{U}$ („У с тильдой). Разговорились они с хозяйкой - толстой,дородной Тильдой.И рассказала она им о великом несчастье,постигшем их город и его ε -окрестности.

- Долго мы жили счастливо.Но созвал как-то наш король Великий Тензор Дважды Ковариантный и Четырежды Контравариантный бал по случаю совершеннолетия своей дочери красавицы Резольвенты.Приехал граф Х в самосопряженной коляске.Приехал князь Синус со своей Синусоидой и другие именитые гости.Дивные зву-

(См. продолжение на стр.46)

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

С.Г.ГИНДИКИН

В алгебре логики исследуется процесс образования сложных высказываний. При этом интересуются лишь тем, когда в зависимости от истинности или ложности простых высказываний истинно или ложно сложное высказывание.

Укажем некоторые способы образования сложных высказываний :

I. Соединение простых высказываний союзом "и" называется конъюнкцией. Например, из простых высказываний: "Сегодня - одиннадцатое января ", " Каникулы закончились", мы получаем высказывание:
" Сегодня - одиннадцатое января и каникулы закончились ". Сложное высказывание, полученное таким образом, истинно в том и только в том случае, когда оба простых высказывания истинны. Этот факт отражается таблицей

x	y	xy
I	I	I
I	0	0
0	I	0
0	0	0

Здесь x и y - это простые высказывания, xy их конъюнкция; 1 (соответственно 0) означает, что высказывание истинно (соответственно, ложно). Заметим, что к той же таблице мы придем, если при образовании сложного высказывания вместо союза "и" будем пользоваться союзами "а" , "но" . Мы не будем интересоваться имеющейся разницей в этих способах образования сложных высказываний.

2. Соединение простых высказываний союзом " или " называется дизъюнкцией:

x	y	$x \vee y$
I	I	I
I	0	I
0	I	I
0	0	0

Из таблицы видно, что дизъюнкция двух высказываний истинна, если истинно, по крайней мере одно из них. Заметим, что союз "или" имеет иногда другой оттенок: истинность сложного высказывания означает, что истинно в точности одно из простых . Здесь мы всюду придерживаемся первого толкования .

3. Отрицанию высказывания соответствует таблица:

x	$\bar{x}$
0	I
I	0

Вообще, для того, чтобы охарактеризовать некоторый способ образования сложных высказываний из простых высказываний $x_1, \ldots, x_n$ нужно задать таблицу истинности:

x_1	x_2	x_3		x_n	$f(x_1, \ldots, x_n)$
I	I	I	....	I	0
I	I	I	....	0	I
0	0	0	....	0	I

В каждой строке в начале стоит некоторый набор нулей и единиц ,указывающий какие из высказываний $x_1, \ldots, x_n$ истинны, а какие ложны; в конце указывается будет ли в этом случае сложное высказывание $f(x_1, \ldots, x_n)$ истинно или ложно. Мы не будем различать способы образования сложных высказываний, для которых таблицы истинности совпадают. Способ образования сложных высказываний $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется функцией алгебры логики.

Если у нас имеется несколько способов построения сложных высказываний (функций алгебры логики), то комбинируя

их можно получить новые способы. Более точно, вместо аргументов x_i одной функции можно подставлять другие функции (применять какой-то способ построения сложных высказываний к высказываниям, уже являющимися сложными) или отождествлять аргументы у функции алгебры логики (при образовании сложного высказывания некоторые простые высказывания считать одинаковыми). Таким образом, например, дизъюнкцию можно получить при помощи конъюнкции и отрицания:

$$x \vee y = \overline{\bar{x}\,\bar{y}}$$

Аналогично конъюнкцию можно выразить через дизъюнкцию и отрицания:

$$xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$$

Оказывается, что любую функцию алгебры логики можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Это делается следующим образом. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ - функция алгебры логики .

Пусть $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ - такой двоичный набор (набор 0 и I), что $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$. Положим

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x & \text{при } \sigma = 1 \\ \bar{x} & \text{при } \sigma = 0 \end{cases}$$

Тогда функция $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$ равна единице лишь на наборе $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Возьмем теперь дизъюнкцию этих выражений для всех наборов $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, на которых $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$. Таблица истинности полученной функции совпадает с заданной.

Система функций алгебры логики $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ называется полной, если через них можно выразить любую функцию алгебры логики. В силу только что сказанного полной будет система функций $xy, x \vee y, \bar{x}$. Полными будут также системы $xy, \bar{x}, x \vee y, \bar{x}$. Наша основная задача - установить критерий полноты системы функций.

Введем некоторые определения.

Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется самодвойственной, если для всех $x_1,\ldots,x_n$:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\overline{f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)}$$

Другими словами, таблица функции не изменится, если все I заменить 0 , а все 0 заменить I.

Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется линейной, если она представима в виде:

$$x_1+\ldots+x_k+a(\mathrm{mod}\,2),$$

где $x_1,\ldots,x_k$ - какие-то из переменных $x_1,\ldots,x_n$; a - постоянное слагаемое, равное 0 или I; сложение проводится по модулю 2, т.е. результатом является остаток от деления суммы на 2.

Пусть $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ - два двоичных набора. Будем говорить, что $\sigma\le\tau$, если $\sigma_i\le\tau_i$ для всех $1\le i\le n$. Заметим, что не для всяких двух наборов σ и τ имеем: или $\sigma\le\tau$ или $\tau\le\sigma$. Например, наборы $(1,0)$ и $(0,1)$ нельзя сравнить. Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется монотонной, если для всяких наборов $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ таких, что $\sigma\le\tau$, имеем:

$$f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\le f(\tau_1,\ldots,\tau_n)$$

Теперь мы можем сформулировать критерий полноты (теорему Поста).

Теорема Поста. Для полноты системы функций алгебры логики необходимо и достаточно, чтобы в ней содержались

а) функция , равная на нулевом наборе I;

б) функция , равная на единичном наборе 0;

в) нелинейная функция;

г) немонотонная функция;

д) несамодвойственная функция.

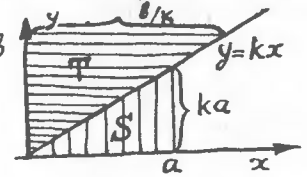
Заметим, что может случиться, что какая-то функция обладает сразу несколькими из перечисленных в теореме свойств. Так,например, функция $\overline{xy}$ обладает всеми пятью свойствами, а потому одна образует полную систему.

ОСНОВНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В.И.ЛЕВИН

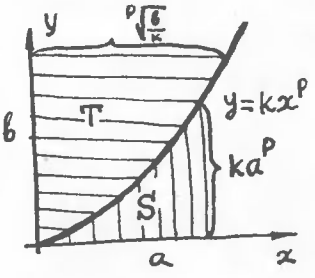
Мы будем рассматривать только тождественные неравенства, справедливые для всех положительных чисел. Всякое такое неравенство в конечном счете сводится к тому факту, что квадрат действительного числа неотрицателен. Ограничимся подробным рассмотрением основного неравенства между средними положительных чисел a_i : арифметическим $A_n=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ и геометрическим $G_n=\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

I. Для $n=2$: $A_2 \geqslant G_2$, или $\frac{1}{2}(a_1+a_2)\geqslant\sqrt{a_1 a_2}$, что является непосредственным следствием очевидного неравенства $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\geqslant 0$. Равенство достигается только при $a_1=a_2$.



Уже это неравенство для двух чисел имеет интересные обобщения. Пусть $a>0$, $b>0$, $k>0$ и рассмотрим в системе координат прямую $y=kx$, а также два указанных на черт.I треугольника с площадями S и T . Очевидно, что $S+T\geqslant ab$ (равенство только при $b/k=a$). Так как $S=\frac{1}{2}ka^2$, $T=\frac{1}{2}\frac{b^2}{k}$, то $\frac{ka^2+b^2/k}{2}\geqslant ab$.

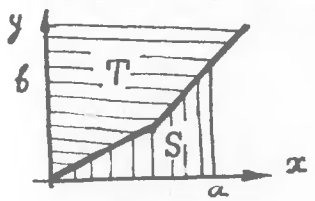
Рассуждение может быть обобщено на случай, когда вместо прямой $y=kx$ мы имеем, например, параболу $y=kx^p$ $(p>1)$. Можно показать, что площадь криволинейного треугольника (черт.2) $S=\frac{1}{p+1}a\cdot ka^p=\frac{ka^{p+1}}{p+1}$. Если воспользоваться этой формулой, то очевидное неравенство $S+T\geqslant ab$ (равенство толь-



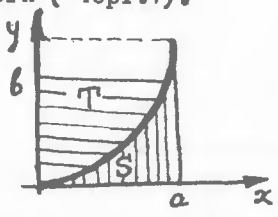
ко при $\sqrt[p]{b/k} = a$) дает $\frac{ka^{p+1}}{p+1} + b\sqrt[p]{b/k} - \frac{\sqrt[p]{b/k}\cdot b}{p+1} \geqslant a\cdot b$

или $$\frac{ka^{p+1}}{p+1} + \frac{\sqrt[p]{b/k}\cdot b}{p+1/p} \geqslant ab.$$

Докажите это неравенство для $p=2$, $p=3$ и вообще для любого натурального p. Сформулируйте неравенства, соответствующие случаям, когда роль разделяющей кривой играет ломаная (черт.3) и четверть окружности (черт.4).



черт.3



черт.4

II. Итерацией неравенства $A_2 \geqslant G_2$ легко получается неравенство $A_n \geqslant G_n$ для $n=2^m$, а отсюда методом спуска неравенство $A_n \geqslant G_n$ для любого натурального $n>2$.

III. Неравенство $A_n \geqslant G_n$ для любого натурального $n>2$ (равенство только, когда все a_i равны между собой) может быть также доказано методом полной математической индукции, если установить следующий факт: $n(A_n - G_n) < (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1})$ (равенство только в том случае, когда $a_{n+1} = G_n$). Этот факт эквивалентен неравенству $x^{n+1} - (n+1)xy^n + ny^{n+1} > 0 \ / x>0, y>0, x\neq y /$, которое вытекает из того, что левая часть равна $(x-y)^2$, умноженному на многочлен от x и y с положительными коэффициентами.

IУ. Одно из доказанных выше неравенств может быть записано в виде $a^2x + b^2/x \geqslant 2ab$ для $x>0$. С помощью этого неравенства можно легкс находить наибольшее и наименьшее значения функций такого вида:

$$y=\frac{x-x_0}{Ax^2+Bx+C},$$

если $A>0$ и $Ax_0^2+Bx_0+C=C_1>0$. Тогда

$$y=\frac{x-x_0}{A(x-x_0)^2+B_1(x-x_0)+C_1}=\frac{1}{B_1+A(x-x_0)+\frac{C_1}{x-x_0}}\le$$
$$\le 1/B_1+2\sqrt{AC_1}$$

для $x>x_0$ и аналогично находится наименьшее значение для $x<x_0$.

ки k-мерной музыки,исполнявшейся хором высших гармоник в сопровождении ударных поляр,услаждали слух.Весь зал кружился в танце па dt (па-де-те).Вдруг погас свет,замелькали на стенах фигуры Лиссажу...А когда починили пробки,смотрят - нет красавицы Резольвенты...Как показало следствие Центральной Предельной Теоремы,ее похитил злой волшебник Иван дер Монд.Он проник во дворец,нарушив условия Даламбера-Эйлера и совершив подстановку в двойной ряд стражи...С тех пор,-вздохнула Тильда,-стала наша область открытой для всех несчастий.

Крепко запала в душу братьям эта страшная история,и решили они освободить красавицу Резольвенту.Как услышала об этом добрая Тильда,стало ей жалко молодых неколлинеарных векторов."Вы же совсем единичные",-вскричала она.Но братья дружно,в один голос ответили:

- Нас мало,но мы образуем базис.

Отправились братья в торговые ряды Тейлора,снарядились, погадали на годографе и тронулись в путь.

Скоро сказка сказывается,да не скоро доказывается...Тяжелые граничные условия не позволили векторам проникнуть в соседнюю область,где господствовало классовое неравенство Коши-Буняковского.И тут перед ними,как из-под земли,вырос Ади-Аб-Ата-Коши-Мак-Лорен.И сказал он братьям:

-Я знаю,что вы задумали.Трудное это дело.Смерть Иван дер Монда в его детерминанте.Детерминант в додекаэдре,додекаэдр в икосаэдре,а икосаэдр привязан тремя узлами к корням полинома Лежандра: один узел простой,другой двойной,а третий ло-

(См.продолжение на стр.67)

ЛЕКЦИИ ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ МОМЕНТА ОСТАНОВКИ

А.Н.ШИРЯЕВ

I. Вообразите, что вам предлагают сыграть в следующую N - шаговую игру. Имеется урна, содержащая, к примеру, 8 жетонов [0], [0], [1], [1], [4], [5], [6], [15], на которых нанесены цифры 0, I, 4, 5, 6 и I5. Вам предоставляется право извлечь из урны (не глядя) один жетон. Если вы при этом вытаскиваете жетон с цифрой y_1, то получаете выигрыш $y_1 - c$, (который реально может оказаться проигрышем, если $y_1 - c < 0$), где c - плата за право извлечения жетона. Затем вы возвращаете этот жетон обратно в урну и вам снова предлагают вытащить жетон. Вы можете отказаться от этого и тогда ваш выигрыш останется равным $y_1 - c$, но можете "рискнуть", сделав еще по крайней мере одну попытку. Если при этом вытащенный жетон имеет номер y_2, то ваш выигрыш становится равным $y_2 - 2c$ (следовательно, предшествующий выигрыш $y_1 - c$ просто аннулируется). И вообще, если вы сыграли таким образом n раз $(n \leq N)$, и решили закончить игру, то ваш выигрыш равен $y_n - cn$, где y_n - номер последнего вытащенного жетона.

Спрашивается, когда надо заканчивать игру (оптимальным образом останавливаться), чтобы ваш средний выигрыш (что это означает точно- мы определим чуть позже) был наибольшим.

2. Интуитивно понятно, что для решения этой задачи существенны следующие два обстоятельства: I) какие значения (обозначим их $x_1, \ldots, x_m$) могут получаться в процессе эксперимента, состоящего в извлечении жетонов и 2) с какими вероятностями могут появляться значения $x_1, \ldots, x_m$.

Обозначим $p_1, \ldots, p_m$ вероятности того, что в результате единичного эксперимента результат наблюдения будет равен соответственно $x_1, \ldots, x_m$. (Грубо говоря, вероятность p_i означает следующее: пусть эксперимент повторно проводится M раз, где

M достаточно большое число; тогда примерно в $p_i M$ случаях результат эксперимента приводит к значению x_i). В рассмотренном выше примере значения x_i и вероятности p_i ,очевидно, определяются следующей матрицей

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \\ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 1, 4, 5, 6, 15 \\ 2/8, 2/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8 \end{pmatrix} \quad (I)$$

В теории вероятностей для описания величин,значения которых могут меняться от эксперимента к эксперименту ,вводится понятие случайной величины. Применительно к рассмотренной задаче с жетонами, мы можем сказать, что результат эксперимента определяется случайной величиной ξ (кси), значения которой $x_1, \ldots, x_6$ и соответствующие им вероятности $p_1, \ldots, p_6$ определяются матрицей (I).

Для таких случайных величин ξ ,полностью определяемых матрицами

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_m \\ p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_m \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где по определению вероятностей $p_i > 0$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$, можно вводить различные их суммарные характеристики. Для нас важным будет понятие среднего значения случайной величины ξ , или как еще говорят - математического ожидания $M\xi$,определяемых формулой

$$\bar{\xi} = M\xi = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i . \quad (3)$$

оно важно для нас потому, что даст возможность точно определить понятие среднего выигрыша. Нетрудно подсчитать, что в примере с жетонами

$$\bar{\xi} = M\xi = 4. \quad (4)$$

Давайте теперь рассмотрим не одну случайную величину, а последовательность случайных величин $\xi(1), \ldots, \xi(N)$,

где $\xi(i)$ - случайная величина, относящаяся к эксперименту, проводимому в момент времени i . Мы будем предполагать, что эти случайные величины с одной стороны независимы между собой, а с другой - одинаково распределены .

Их независимость означает, что знание конкретных значений величин $\xi(1),\ldots,\xi(i)$ не влияет на вероятности значений случайной величины $\xi(i+1)$, $1 \le i \le N-1$. А одинаковость их распределений означает, что соответствующие величинам $\xi(1),\ldots,\xi(N)$ матрицы (2) одинаковы.

3. Возвратимся к задаче с жетонами. Предположим, что мы вступили в игру и совершили n извлечений жетонов из урны, возвращая каждый раз вынутый жетон обратно. Пусть $\xi(i)$ - случайная величина, описывающая результат i-ого извлечения. Понятно, что $\xi(1),\ldots,\xi(n)$ - это последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин. Пусть конкретные значения n извлечений (т.е. конкретные значения величин $\xi(1),\ldots,\xi(n)$ есть $x(1),\ldots,x(n)$). Если мы решаем прекратить игру, то наш выигрыш в этой партии равен

$$v_{N-n}(x(1),\ldots,x(n)) = x(n) - c\cdot n, \qquad (5)$$

где индекс $(N-n)$ означает, что в принципе мы могли бы еще извлекать жетоны $(N-n)$ раз.

Чтобы продвинуться дальше , нам надо дать определение правила остановки и оптимального правила остановки .

Поставим каждой " реализации" $x(1),\ldots,x(n)$ (в рассматриваемом примере с жетонами их число равно 6^N) в соответствие функцию $S(x(1),\ldots,x(N))$, которая принимает одно из значений $0, 1, \ldots, N$ и которая обладает следующим свойством:

если для реализации $x(1),\ldots,x(N)$

то $S(x(1),\ldots,x(n),\ldots,x(N)) = n,$

$S(y(1),\ldots,y(n),\ldots,y(N)) = n$

для любой другой реализации $y(1),\dots, y(N)$ с $y(1)=x(1),\dots, y(n)=x(n)$

Это условие наглядно означает то, что решение об остановке наблюдений в момент времени n должно определяться лишь "прошлыми" значениями $x(1),\dots, x(n)$ и не должно зависеть от " будущих" значений $x(n+1),\dots, x(N)$.

Итак, задание некоторой функции $S=S(x(1),\dots, x(N))$ с указанными выше свойствами на реализациях $x(1),\dots, x(N)$ определят некоторое правило остановки, или как еще говорят некоторую стратегию S.

Пусть S - стратегия, определяемая функцией $S=S(x(1),\dots, x(N))$. Рассмотрим случайную величину

$$v_{N-S(x(1),\dots, x(N))}(x(1),\dots, x(S))$$

и ее среднее значение, т.е. математическое ожидание, обозначим

$$F_N(S)=M v_{N-S(x(1),\dots, x(N))}(x(1),\dots, x(S))$$

Положим также

$$F_N=\max_S F_N(S), \tag{7}$$

где $\max$ берется по всем стратегиям S, определяемых функциями $S=S(x(1),\dots, x(N))$ с указанными выше свойствами. Стратегия , или правило остановки, $\tilde{S}$ называется оптимальной, если

$$F_N(\tilde{S})=F_N \tag{8}$$

Наша цель - найти оптимальную стратегию $\tilde{S}$ как для случая

$$v_{N-n}(x(1),\dots, x(n))=x(n)-cn, \tag{9}$$

так и для того случая, когда

$$v_{N-n}(x(1),\dots, x(n))=\max(x(1),\dots, x(n))-cn \tag{10}$$

(Дать наглядную интерпретацию выигрыша, определяемого формулой (10)).

4. Начнем с рассмотрения случая (9), рассуждая следующим образом. Предположим, что мы N раз (т.е. максимально возможное число) вынимали жетоны и результат последнего вынимая был $x(N)=x$. Тогда наш выигрыш будет равен $v_0(x)=x-cN$. Здесь индекс "о" отражает тот факт, что мы не имеем в запасе больше ни одной "попытки". Чему равен средний выигрыш, если мы непременно будем делать все N возможных " попыток" ? Очевидно, что средний выигрыш при такой стратегии равен

$$Mv_0(\xi(N))=\sum_{i=1}^{m} x_i p_i - cN. \qquad (10)$$

Предположим же теперь, что мы сделали $(N-1)$ попытку. Следовательно, у нас имеется вообще говоря, еще возможность сделать одну попытку. Но можно ее и не делать, т.е. прекратить игру на $(N-1)$ шаге. В этом случае, наш выигрыш станет равным $v_1(x)=x-c(N-1)$, где x - это результат последнего вынимания, т.е. $x(N-1)=x$. Ну а если мы все же " рискнем" и сделаем еще одну (и последнюю) попытку. Что мы тогда получим ? Нетрудно понять, что наш средний выигрыш при этом будет в точности равен $\sum_{i=1}^{N} v_0(x_i)p_i$.

Теперь уже становится ясным, что же надо делать на $(N-1)$-ом шаге. Обозначим

$$f_1(x)=\max\begin{cases} v_1(x) \\ \sum v_0(x_i)p_i \end{cases} \qquad (11)$$

Если $f_1(x)=v_1(x)$ или $v_1(x)\geq\sum v_0(x_i)p_i$ (т.е. выигрыш от окончания не меньше выигрыша от продолжения), то игру следует прекращать в момент $N-1$. В противном случае - делать последнюю попытку.

Будем рассуждать далее индуктивным образом. Пусть в мо-

мент $(N-2)$ $x(N-2)=x$. Что делать: прекратить игру (и тогда мы получим $v_{N-2}(x)=x-(N-2)c$) или же сделать еще по крайней мере одну попытку (что нам может дать выигрыш $\sum_{i=1}^{m} f(x_i)p_i$?) Положим

$$f_2(x)=\max\left\{v_2(x),\ \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i)p_i\right. \tag{12}$$

и вообще пусть для $n=1,\dots,N-1$

$$f_n=\max\left\{v_n(x)\ \sum_{i=1}^{m} f_{n-1}(x_i)p_i\right. \tag{13}$$

где $f_0(x)=v_0(x)$.

В случае $n=N$ положим

$$f_N=\max\left\{0\ \sum_{i=1}^{m} f_{N-1}(x_i)p_i,\right. \tag{14}$$

что формально есть частный случай (13), если условиться считать $x(0)=0$ и $v_N(0)=0$.

Следующие теоремы позволяют понять в какой связи находятся между собой функции f_N, F_N (см. (7)) и как соотношения (14) позволяют найти оптимальную стратегию $\tilde{S}$.

Теорема 1. Функция f_N , найденная из рекуррентных соотношений (13), (14) совпадает со значением максимально возможного выигрыша F_N .

Теорема 2. Оптимальная стратегия $\tilde{S}$ описывается следующим образом:

Пусть $\{\mu_n,\ n=0,1,\dots,N\}$ - последовательность чисел, определяемых рекуррентно из уравнений

$$\mu_n=\sum_{i=1}^{m}\max(x_i,\mu_{n-1}-c)p_i,\quad n=1,\dots,N \tag{15}$$

$$\mu_0=-\infty$$

Тогда, в момент $n=0$

если $\begin{cases} 0 > \mu_N - c & \text{, то не вступает в игру} \\ 0 \le \mu_N - c & \text{, то делаем по крайней мере одну попытку,} \end{cases}$

в момент $0 < n < N$,

если $\begin{cases} x > \mu_n - c & \text{, то прекращаем игру,} \\ x \le \mu_n - c & \text{, то делаем по крайней мере еще одну попытку} \end{cases}$

в момент $n=N$ игру прекращаем.

Максимальный средний выигрыш

$$F_N = f_N = \max(0, \mu_N - c). \qquad (16)$$

Иначе можно сказать, что функция $\tilde{S} = \tilde{S}(x(1), \ldots, x(N))$, определяющая оптимальную стратегию $\tilde{S}$ устроена следующим образом:

$$\tilde{S}(x(1), \ldots, x(N)) = \begin{cases} 0, & 0 > \mu_N - c \\ n, & \mu_k - c \ge x_k \text{ для } k = 1, \ldots, n-1 \\ & \text{и } \mu_n - c < x(n) \end{cases}$$

Теорема 3. Для всех $n = 0, 1, \ldots, N-1$ решение уравнений (13) дается формулой

$$f_n(x) = \max\{x, \mu_n - c\} - c(N-n), \qquad (17)$$

где μ_n определяются из (15).

Доказательство теоремы 3 непосредственно получается, если последовательно для $n = 1, 2, \ldots, N-1$ отыскивать $f_n(x)$ из уравнений (13).

Несколько сложнее устанавливается результат, сформулированный в теореме 1. Зато, считая доказанными теоремы 1 и 3, легко получить доказательство теоремы 2.

В самом деле, рассмотрим уравнения

$$f_n(x) = \max \begin{cases} v_n(x), \\ \sum f_{n-1}(x_i) p_i, \end{cases}$$

Из приведенных ранее соображений ясно, что $f_n(x)$ можно трактовать, как тот наибольший выигрыш, который мы можем получить, если у нас в принципе есть возможность совершить n попыток, а результат $(N-n)$ -й попытки есть x. Поэтому, если

$$f_n(x) \geqslant v_n(x),$$

т.е. в силу (I7)

$$\max(x, \mu_n - c) - c(N-n) \geqslant x - (N-n)c,$$

или

$$\mu_n - c \geqslant x,$$

то следует сделать еще по меньшей мере одну попытку. В противном случае игру следует заканчивать. Аналогичными рассуждениями показывается, что вступать в игру не выгодно, когда $0 > \mu_N - c$ и следует вступать в игру, если $0 \leq \mu_N - c$.

Таким образом мы видим, что полное описание оптимальной стратегии $\tilde{S}$ сводится к определению чисел $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_N$, которые находятся рекуррентно из уравнений

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{m} \max(x_i, \mu_{n-1} - c) p_i, \quad \mu_0 = -\infty. \qquad (I8)$$

Обозначим

$$A(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \max(x_i - x, 0) p_i. \qquad (I9)$$

Тогда (I8) перепишется в следующем виде

$$\mu_n = A(\mu_{n-1} - c) + (\mu_{n-1} - c). \qquad (20)$$

Функция $A(x)$, как следует из ее определения (I9) обладает следующими свойствами:

I) $A(x)$ кусочно-линейна и монотонно не возрастает;

2) $A(x) \geqslant 0$.

Отсюда сразу следует следующая

Теорема 4. Если $c=0$ (т.е. плата за возможность сделать попытку равна 0), то

$$\mu_N \geq \mu_{N-1} \geq \ldots \geq \mu_1 \geq \mu_0 \quad (=-\infty).$$

Применим эту теорему и формулу (20) для задачи с жетонами. Пусть $N=4$, $c=0$. Легко подсчитать, что оптимальная стратегия здесь описывается следующим образом:

I) всегда вступаем в игру;

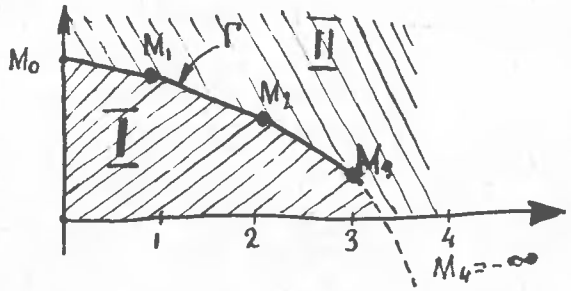
2) на I шаге заканчиваем игру, только если $x(1)=15$

3) на 2 шаге –"– –"– $x(2)=6,15$

4) На 3 шаге –"– –"– $x(3)=5,6,15$

5) на 4 шаге игра всегда заканчивается.

Если, как это сделано на графике,



точки M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно с координатами $(0,\mu_4), (1,\mu_3), (2,\mu_2), (3,\mu_1), (4,\mu_0)$.

соединить отрезками прямых, то полуплоскость $n \geq 0$ разобьется границей Γ на две области I и II (сама граница Γ относится к области I). При этом область I – это область тех значений x-ов, для которых следует делать еще по крайней мере одну попытку. Попадая же в область II, мы немедленно прекращаем игру.

Задача I. Найти области I и II для случая и $N=4$ и $c=1,2,3$.

Интересно рассмотреть тот случай, когда $N\to\infty$. В этом случае можно показать, что оси n, поскольку $\mu_n \to \alpha(c)+C$ при $n\to\infty$, где $\alpha(C)$ - корень уравнения

$$A(\alpha)=C$$

5. Остановимся вкратце теперь на случае (I0), когда $v_{N-n}(x(1),\dots,x(n)) = \max(x(1),\dots,x(n))-cn$. Какова здесь оптимальная стратегия $\tilde{S}$? На первый взгляд может показаться, что эта задача сложнее, чем предшествующая. На самом деле это не так. Рассуждениями, аналогичными предшествующим, устанавливается справедливость следующего результата.

Теорема 5. При любом $N\geq 1$ оптимальное правило состоит в следующем:

если $m_n = m$, $N-1 \geq n \geq 1$

где $m_n = \max(x(1),\dots,x(n))$, а m - корень уравнения $A(m)=c$, то следует сделать по крайней мере еще одну попытку, если же $m_n > m$, то прекратить игру. В случае $n=0$ оптимальное правило состоит в следующем: вступать в игру только в том случае, когда $0\leq m$.

Задача 2. Найти оптимальную стратегию в задаче с жетонами при $C=0,1,2$.

6. Мы видим, что одним из центральных моментов решения задач с жетонами было использование рекуррентных соотношений (I3) для функций $f_n(x)$, которые следует находить, последовательно для $n=1,2,\dots,N$. Эти соображения, применимые и в гораздо более общих задачах, лежат в основе так называемого принципа динамического программирования, ознакомиться с которым можно по книге Р.Беллмана " Динамическое программирование".

СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ В СЕДЬМЫХ КЛАССАХ ШКОЛЫ № 2

О.В.ЛОКУЦИЕВСКИЙ

Семинарские занятия в седьмых классах [x] не связаны никакой фиксированной программой. В 7а классе [xx] рассматривались в первом полугодии следующие вопросы:

I. Простые числа: возможность разложения произвольного целого $\geqslant 2$ на простые множители (единственность разложения не доказывалась); бесконечность ряда простых; существование отрезка натурального ряда произвольной длины, не содержащего простых.

2. Принцип математической индукции (демонстрировался на примерах суммирования геометрической прогрессии и первых трех степеней натуральных чисел; при изложении особо подчеркивалось, что существенной частью индукционного процесса является " угадывание " результата).

3. Теорема Эйлера и ее приложения (раскрашивание карт, правильные многогранники). Изложению предпосылался ряд вводных задач [xxx]. Сама формула Эйлера доказывалась двойной индукцией (сначала равенство $n_0 - n_1 = 1$ для связных деревьев).

Помимо задач, связанных с темой урока, давались разнообразные дополнительные задачи (например, задачи на применение принципа Дирихле). Приведем некоторые из предлагавшихся задач.

---

x/ Им отводится два часа в неделю.

xx/ О семинарских занятиях в 7б классе см. заметку Л.И.Головиной в сборнике "Математическая школа ", № 6.

xxx/ См. Е.Б.Дынкин и В.А.Успенский , "Математические беседы".

1. 35 учеников 7а класса были в театре. Могло ли случиться так, что во время антрактов каждый из них обменялся рукопожатием с девятью своими одноклассниками ?
2. При каких целых значениях n число $n^2-4n+10$ делится на 36 ?
3. Найти все такие пары целых чисел x и y, что
$$x^2+3xy+2y^2-5=0.$$
4. Доказать, что
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$
5. Сколько диагоналей имеет выпуклый n - угольник ?
6. Существует ли многогранник, имеющий:
   а) 10 вершин, 15 ребер и 7 граней ?
   б) 14 вершин и 8 граней ?
7. Доказать, что среди чисел, записывающихся нулями и единицами (в десятичной системе), найдется делящееся на 137.
8. Доказать, что разносторонний треугольник нельзя разрезать на два равных.
9. Доказать, что треугольник, имеющий две равных медианы, - равнобедренный.

Несмотря на большое число решенных задач, рассмотренный круг " принципов решения " весьма ограничен. Связано это с тем, что по поводу каждого такого принципа предлагалась, как правило, серия задач (сначала одна, и лишь после ее разбора на последующем занятии еще несколько, причем не всегда сразу).

Каждый учащийся должен был выполнить два контрольных задания (дома). Первое из них содержало четыре задачи (см.выше 1-4). Во втором предлагалось изложить доказательство теоремы Эйлера. В конце семестра был проведен зачет.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ .

Э.Б.ВИНБЕРГ.

§ I.

Предположим, что для любых двух элементов x, y некоторого множества M определено неотрицательное действительное число $\rho(x,y)$, называемое расстоянием от x до y. Множество M вместе с функцией $\rho(x,y)$ называется метрическим пространством, если выполнены следующие аксиомы:

(P1) $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;

(P2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(P3) (аксиома треугольника)

$\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z)$.

Прямая , плоскость и пространство, изучаемые в элементарной геометрии, являются метрическими пространствами .Аксиома (P4) в этом случае превращается в известную теорему о сторонах треугольника.

Множество действительных (соотв.,комплексных) чисел можно рассматривать как метрическое пространство, если определить расстояние по формуле

$$\rho(x,y)=|x-y|. \qquad (I)$$

При изображении действительных чисел точками прямой, а комплексных чисел – точками плоскости, расстояние, определяемое по формуле (I), совпадает с обычным расстоянием между точками прямой или плоскости.

Метрические пространства M_1 и M_2 называются изометричными, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие таким образом, чтобы расстояние между любыми двумя точками пространства M_1 равнялось расстоянию между соответствующими точками пространства M_2 . Множество действительных (соотв.,комплексных) чисел, таким образом, изометрично прямой (соотв., плоскости).

Метрическое пространство $\mathcal{M}$ называется n - мерным евклидовым пространством, если в нем можно ввести координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (принимающие действительные значения) таким образом, что

1) различные точки всегда отличаются хотя бы одной координатой,

2) любой упорядоченный набор из n чисел является набором координат некоторой точки;

3) если точка $x \in \mathcal{M}$ имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а точка $y \in \mathcal{M}$ – $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}.$$

Из определения ясно, что n - мерные евклидовы пространства изометричны между собой. Рассмотренные до сих пор примеры метрических пространств являлись евклидовыми пространствами размерностей 1,2,3. Существуют, однако, евклидовы пространства всех размерностей.

Сферу S в трехмерном евклидовом пространстве можно превратить в метрическое пространство, приняв за расстояние между точками $x, y \in S$ угол между радиусами, идущими в точки x и y. Это пространство не будет евклидовым, хотя бы потому, что все расстояния в нем не превосходят π.

Возьмем неоднородный прозрачный шар и определим расстояние между точками этого шара как время, за которое свет проходит из одной точки в другую. Аксиомы метрического пространства в этом случае вытекают из законов распространения света. При определенном законе изменения коэффициента преломления это пространство будет изометрично пространству Лобачевского.

Пусть $\mathcal{M}_1$ – множество, лежащее в метрическом пространстве $\mathcal{M}$. Будем считать расстояние между любыми точками в $\mathcal{M}_1$ такими же, как и в $\mathcal{M}$. Тогда $\mathcal{M}_1$ само будет метрическим пространством. При таком определении расстояния в $\mathcal{M}_1$ говорят, что $\mathcal{M}_1$ – подпространство пространства $\mathcal{M}$. (Заметьте, что в

приведенном выше примере со сферой, лежащей в трехмерном евклидовом пространстве , расстояние определялось не так.)

§ 2.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства $\mathcal{M}$ называется сходящейся к точке $x \in \mathcal{M}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что при всех $n \geq n_0$ $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ (т.е. $\rho(x_n, x) \to 0$).

Никакая последовательность не может иметь двух различных пределов.

Для того, чтобы последовательность $\{x_m\}$ точек n - мерного евклидова пространства сходилась к точке x , необходимо и достаточно, чтобы для каждого k, $1 \leq k \leq n$ последовательность k - тых координат точек x_n сходилась к k - той координате точки x .

Метрическое пространство $\mathcal{M}$ называется

ограниченным, если существует такое число C , что $\rho(x, y) \leq C$ для любых $x, y \in \mathcal{M}$;

компактным, если из любой последовательности в $\mathcal{M}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность;

полным, если в нем имеет место критерий Коши для сходимости последовательностей.

Множество $\mathcal{M}_1$ в метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называется ограниченным (соотв.,компактным или полным), если оно является таковым как подпространство пространства $\mathcal{M}$.

Множество $\mathcal{M}_1$ в метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называется замкнутым, если предел любой сходящейся в $\mathcal{M}$ последовательности точек, лежащих в $\mathcal{M}$, также принадлежит $\mathcal{M}_1$.

Теорема I. Всякое замкнутое ограниченное множество в евклидовом пространстве компактно.

Теорема 2. Евклидово пространство полно.

§ 3.

Если каждой точке множества $\mathcal{M}$ сопоставлена каким-либо образом точка множества $\mathcal{N}$, то говорят, что задано отображение множества $\mathcal{M}$ в множество $\mathcal{N}$ или, что то же, функция на $\mathcal{M}$ со значениями в $\mathcal{N}$.

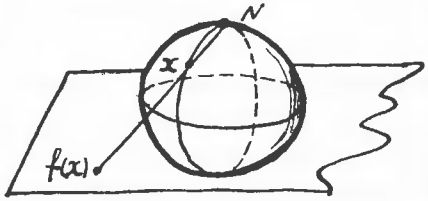
Отображение f метрического пространства $\mathcal{M}$ в метрическое пространство $\mathcal{N}$ называется непрерывным, если для любой сходящейся последовательности $\{x_n\}$ точек пространства $\mathcal{M}$ последовательность $\{f(x_n)\}$ также сходится и

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Эквивалентное определение: отображение f непрерывно, если для любой точки $x \in \mathcal{M}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$, как только $\rho(x, y) < \delta$.

Всякая изометрия, т.е. отображение, сохраняющее расстояния, является непрерывным отображением, так как всегда можно взять $\delta = \varepsilon$. То же относится к отображениям, не увеличивающим расстояний.

Отображение сферы с выколотой точкой на плоскость, построение которого ясно из рисунка, непрерывно, хотя и увеличивает расстояния. (Это так называемая стереографическая проекция).



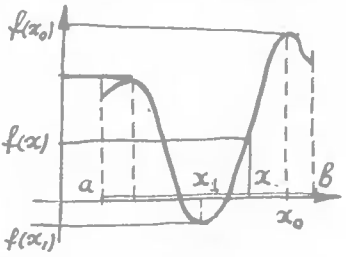
Композиция (результат последовательного выполнения) двух непрерывных отображений есть непрерывное отображение.

Если f и g – непрерывные числовые функции, определенные на метрическом пространстве $\mathcal{M}$ (т.е. непрерывные отображения пространства $\mathcal{M}$ в поле действительных чисел), то функции $f+g$, fg также непрерывны; если g нигде на $\mathcal{M}$ не обращается в 0, то и функция f/g непрерывна.

Теорема 3. (О максимуме непрерывной функции.) Пусть f – непрерывная функция на компакте $\mathcal{M}$, принимающая действитель-

ные значения. Тогда существует такая точка $x_0 \in \mathcal{M}$, что $f(x) \le f(x_0)$ при всех $x \in \mathcal{M}$.

Следствие. Непрерывная числовая функция, определенная на отрезке числовой оси, достигает в некоторой точке x_0 своего максимума, а в некоторой точке x_1 – минимума.



§ 4.

Множество $\mathcal{M}_1$ в метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называется всюду плотным, если любая точка из $\mathcal{M}$ является пределом некоторой последовательности точек, лежащих в $\mathcal{M}_1$. Например, множество рациональных чисел всюду плотно в поле действительных чисел.

Очевидно, что непрерывная функция однозначно восстанавливается, если известны ее значения на всюду плотном множестве.

Функция f на метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называется равномерно непрерывной, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

как только $\rho(x, y) < \delta$.

Теорема 4. (О продолжении непрерывной функции с всюду плотного множества.) Пусть на всюду плотном множестве $\mathcal{M}_1$ метрического пространства $\mathcal{M}$ задана равномерно непрерывная функция f, принимающая значения в полном метрическом пространстве $\mathcal{N}$. Тогда существует единственная непрерывная функция f на $\mathcal{M}$ со значениями в $\mathcal{N}$, совпадающая с функцией f_1 на множестве $\mathcal{M}_1$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathcal{M}$. Существует последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{M}$, сходящаяся к x_0. Докажем, что

последовательность $\{f_1(x_n)\}$ фундаментальна. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции f_1 можно найти такое $\delta > 0$, что $\rho(f_1(x), f_1(y)) < \varepsilon$, как только $\rho(x, y) < \delta$. Далее, так как последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся, то она фундаментальная, и существует такой номер n_0, что $\rho(x_n, x_{n_0}) < \delta$ при всех $n \geqslant n_0$. Но тогда $\rho(f_1(x_n), f_1(x_{n_0})) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant n_0$.

Так как пространство $\mathcal{N}$ полно, то существует $\lim f_1(x_n)$. Если $\{y_n\}$ – другая последовательность, сходящаяся к x_0, то $\rho(x_n, y_n) \to 0$ и, в силу равномерной непрерывности функции f_1, $\rho(f_1(x_n), f_1(y_n)) \to 0$, так что $\lim f_1(x_n) = \lim f_1(y_n)$. Это общее значение $\lim f_1(x_n)$ для всех последовательностей $\{x_n\}$, сходящихся к x_0, примем за $f(x_0)$. Если $x_0 \in \mathcal{M}_1$, то, взяв $x_n = x_0$ при всех n, получим последовательность, сходящуюся к x_0, причем $\lim f_1(x_n) = f_1(x_0)$. Таким образом, определенная нами функция f на множестве $\mathcal{M}_1$ совпадает с f_1.

Осталось показать, что функция f непрерывна. Мы докажем даже больше: что функция f равномерно непрерывна. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что $\rho(f_1(x), f_1(y)) < \varepsilon$, как только $\rho(x, y) < \delta$ (при $x, y \in \mathcal{M}_1$). Пусть $x, y \in \mathcal{M}$, $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$, где $x_n, y_n \in \mathcal{M}_1$. Если $\rho(x, y) < \delta$, то и $\rho(x_n, y_n) < \delta$ для достаточно больших n. Следовательно, $\rho(f_1(x_n), f_1(y_n)) < \varepsilon$ для тех же n. Так как $f(x) = \lim f_1(x_n)$, $f(y) = \lim f_1(y_n)$, то $\rho(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

Применим теорему 4 к построению показательной функции a^x $(a > 0)$.

Для рационального $x = p/q$ число a^x определяется как $\sqrt[q]{a^p}$. Легко проверяется монотонность функции a^x для рациональных значений x, а также основное соотношение

$$a^{x+y} = a^x a^y \tag{2}$$

для рациональных x, y.

Докажем, что функция a^x равномерно непрерывна на множестве рациональных чисел, не превосходящих некоторого числа K (которое может быть выбрано произвольно). Предположим для определенности, что $a > 1$. Пусть $a = 1 + c$, где $c > 0$. При любом натуральном n

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{c}{n}$$

В самом деле, если бы для какого-нибудь n имело место неравенство $a^{1/n} > 1 + c/n$, то возведя обе его части в n-ую степень и воспользовавшись разложением бинома Ньютона, мы получили бы противоречие:

$$a > \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n > 1 + c = a$$

Пусть теперь x, y - произвольные рациональные числа, не превосходящие K, причем

$$y < x < y + \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$a^x - a^y = a^y (a^{x-y} - 1) <$$
$$< a^y (a^{1/n} - 1) < \frac{a^K \cdot c}{n}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое n, что $\frac{a^K c}{n} < \varepsilon$.

Положим $\delta = \frac{1}{n}$. Из предыдущих выкладок ясно, что если x, y - рациональные числа, не превооходящие K, причем $|x - y| < \delta$, то $|a^x - a^y| < \varepsilon$.

Таким образом, теорема 4 может быть применена в рассмат-

риваемом случае для полупрямой $x \le K$; но так как K произвольно, то можно получить в результате непрерывную функцию a^x на всей числовой оси, совпадающую в рациональных точках с ранее построенной функцией. Монотонность и соотношение (2) для всех действительных значений аргумента получаются путем предельного перехода.

§ 5.

Теоремы этого параграфа относятся только к случаю, когда значения аргумента и функции являются действительными числами. Это будет подразумеваться без специальных оговорок.

Теорема 5. Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на нем все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Функция $f(x)$ называется строго монотонной, если из $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Теорема 6. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a, b]$. Тогда существует единственная функция $g(x)$, определенная на отрезке $[f(a), f(b)]$ и обладающая тем свойством, что $f(g(x)) = x$ для всех x из этого отрезка. Функция $g(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[f(a), f(b)]$.

Функция $g(x)$, о которой идет речь в теореме 6, называется обратной функцией для $f(x)$.

Теорема 6 позволяет утверждать, что для функции x^n, непрерывной и строго возрастающей на полуоси $[0, +\infty)$, существует непрерывная обратная функция. Эта функция обозначается через $\sqrt[n]{x}$ и называется арифметическим значением корня n-ной степени из x.

Аналогично, для функции e^x, непрерывной и строго возрастающей на всей числовой оси, существует непрерывная обратная функция $\ln x$ - логарифм x.

Литература:

1. Энциклопедия элементарной математики, т.Ш (Функции и пределы) первая статья В.Л.Гончарова, гл. IУ, У.
2. А.Н.Колмогоров и С.В.Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, выпуск первый, 1954, гл. I, П.
3. Ю.А.Шрейдер, Что такое расстояние ? Физматгиз, 1963.

гарифмический.Полином тот растет в изолированной точке за 3х9 земель в пространстве великого хана Банаха.И охраняет его чудище Декремент с трансцендентным числом ног.Тот детерминант надо достать и приравнять к нулю.Тут и будет конец Иван дер Монду.Идите по следам матриц,и придете вы прямехонько к изолированной точке.

Пошли братья-векторы по следам матриц и через три периода оказались перед выпуклым непустым множеством,заполненным несжимаемой вязкой жидкостью.Стоят и гадают,как им быть - не знают.Вдруг вынырнула σ -рыба,хвостом бьет,приговаривает: "Вот я вам и пригодилась!" Перевезла она векторов на другую сторону.Поблагодарили они ее и пошли дальше.Глядь- перед ними разрыв второго рода.А тут откуда не возьмись малый параметр! Ударился об земь,разложился по своим степеням,и перешли по нему братья на другую сторону.

Дошли братья до точки ветвления.Смотрят столб стоит,а на столбе том написано:

- Направо пойдешь - в бесконечность уйдешь,налево пойдешь координат не соберешь, прямо пойдешь - транспонируешься!

Подумали братья,подумали,да и пошли в разные стороны.

Рассмотрим вектор i_1 .Шел-шел i_1 ,видит: перед ним,как из-под земли,неисчислимые орты хана Банаха,все кроме,быть может,одного одеты в жорданову форму,подстрижены под скобку Пуассона.

- Ах,-опечалился вектор,-нет со мной моих любимых братьев! Да ничего, i_1 в поле воин! (См.окончание на стр.86)

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

I. Привести 3 примера множеств, в которых определена неотрицательная функция $\rho(x,y)$, удовлетворяющая всем аксиомам расстояния, кроме одной.

2. Проверить аксиомы метрического пространства для следующих случаев:

а) $\mathcal{M}$ – множество последовательностей из n чисел; расстояние между $x=(x_1,\dots,x_n)$ и $y=(y_1,\dots,y_n)$ определяется по формуле

$$\rho(x,y)=\max_i |x_i-y_i|;$$

б) $\mathcal{M}$ – множество бесконечных последовательностей $(x_1,x_2,\dots)$, для которых $\sum x_i^2<\infty$; расстояние определяется по формуле

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum (x_i-y_i)^2}$$

3. Множество $\mathcal{M}_1$ в метрическом пространстве называется открытым, если для любой точки $x_1\in\mathcal{M}_1$ существует такое $\varepsilon>0$, что из $\rho(x,x_1)<\varepsilon$ следует, что $x\in\mathcal{M}$. Доказать, что дополнение к замкнутому множеству открыто, а дополнение к открытому множеству замкнуто.

4. Доказать, что пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

5. Доказать, что объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

6. Доказать, что всякое открытое множество на прямой есть объединение непересекающихся интервалов (конечных или бесконечных).

УКАЗАНИЕ. Доказать вначале, что для любого ограниченного сверху множества $\mathcal{M}_1$ на прямой существует точная верхняя грань, т.е. такое число c, что в $\mathcal{M}_1$ не существует чисел, больших, чем c, но для любого $\varepsilon>0$ существуют числа, большие, чем $c-\varepsilon$.

7. Доказать, что всякое компактное метрическое пространство полно и ограниченно.

8. Доказать, что шар $\sum x_i^2 \le 1$ в метрическом пространстве задачи 26 не компактен.

9. Доказать, что следующие функции непрерывны на всей числовой оси: а) $f(x) = x^2$;

б) $f(x) = \sin x$;

в) $f(x) = \sin x^2$;

г) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{,если } x \neq 0, \\ 0 & \text{,если } x = 0. \end{cases}$

Какие из них равномерно непрерывны?

10. В каких точках числовой оси непрерывна функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{,если } x \text{ иррационально,} \\ \frac{1}{n} & \text{,если } x = \frac{m}{n} \text{, причем } m \text{ и } n \end{cases}$$

взаимно просты.

11. Доказать, что в любом метрическом пространстве функция $\rho(x_0, x)$ равномерно непрерывна по x.

12. Доказать, что стереографическая проекция сферы с выколотой точкой на плоскость непрерывна, но не равномерно непрерывна.

13. Можно ли доопределить функцию

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

в точке $x = y = 0$ так, чтобы она стала непрерывной функцией на всей плоскости?

14. Найти все непрерывные функции на прямой, удовлетворяющие условию

а) $f(x+y) = f(x) f(y)$;

б) $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

I5. Доказать, что отображение f метрического пространства $\mathcal{M}$ в метрическое пространство $\mathcal{N}$ тогда и только тогда непрерывно, когда для любого открытого множества $\mathcal{U} \subset \mathcal{N}$ его полный прообраз $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in \mathcal{M} : f(x) \in \mathcal{U}\}$ является открытым множеством в $\mathcal{M}$. Показать на примере, что образ открытого множества при непрерывном отображении может не быть открытым.

I6. Доказать, что всякая непрерывная функция на компакте равномерно непрерывна.

I7. Доказать, что композиция равномерно непрерывных отображений равномерно непрерывна.

I8. Метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве $\mathcal{M}$ называются эквивалентными, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\rho_1(x, y) < \delta$ следует, что $\rho_2(x, y) < \varepsilon$ и из $\rho_2(x, y) < \delta$ следует, что $\rho_1(x, y) < \varepsilon$. Доказать, что метрика, определенная на множестве последовательностей из n чисел в задаче 2а, эквивалентна метрике евклидова пространства.

I9. Доказать, что для эквивалентных метрик на множестве $\mathcal{M}$ понятие открытого и замкнутого множества, предела последовательности, непрерывного и равномерно непрерывного отображения (в M или из M), ограниченности, компактности и полноты совпадают.

20. Доказать, что если $z_1, z_2, \ldots$ – комплексные числа и ряд $\sum |z_n|$ сходится, то и ряд $\sum z_n$ сходится. Вывести отсюда, что ряд $\sum z^n$ сходится при $|z| < 1$, а ряд $\sum \frac{z^n}{n!}$ сходится при всех z.

2I. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка в себя обладает неподвижной точкой.

22. Пусть P – выпуклый многоугольник на плоскости, x – любая точка плоскости. Доказать, что существует прямая, проходящая через x и делящая внутренность многоугольника P на равные по площади части.

Тема 3. Линейные операторы; кривые, поверхности и гиперповерхности второго порядка

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

19. Оператор A' называется сопряженным к оператору A, если для любых $x, y \in V$ выполняется равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Доказать, что

а) $(A')' = A'$;

б) $(AB)' = B'A'$;

в) $\operatorname{Ker} A'$ есть ортогональное дополнение $\operatorname{Im} A$;

г) $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A'$;

д) если A обратим, то $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

20. Всякий линейный оператор A представляется в виде суммы $A_1 + A_2$, где $A_1' = A_1$ и $A_2' = -A_2$.

21. Для каждого линейного оператора A можно построить многочлен $P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_n$ такой, что $P(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \ldots + a_m E = 0$.

22. Пусть $P(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \ldots + a_m E = 0$ и $a_m \neq 0$. Доказать, что оператор A невырожден.

23. Найти все операторы, матрица которых не зависит от выбора базиса.

24. Пусть A - линейный оператор в n - мерном пространстве V. Доказать, что если $A^k = 0$ при некотором k, то $A^n = 0$.

25. Всякий линейный оператор A имеет инвариантное одномерное или двумерное подпространство.

Указание: пусть $P(x)$ - многочлен минимальной степени, такой, что $P(A) = 0$. Разложить $P(x)$ на множители степени I или 2: $P(x) = P_1(x) P_2(x) \ldots P_k(x)$ и рассмотреть подпространст-

во, натянутое на векторы (z, Az), где $z = P_2(A)\dots P_k(A)y$, а y выбрано так, чтобы $z \neq 0$.

26. Пусть $P(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_k)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – попарно различные дейотвительные числа. Доказать, что если $P(A) = 0$, то:

а) можно выбрать базис из собственных векторов оператора A,

б) все собственные значения A содержатся среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Указание. Доказать предварительно, что

$$\frac{1}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_k)} = \frac{C_1}{x-\lambda_1} + \frac{C_2}{x-\lambda_2} + \dots + \frac{C_k}{x-\lambda_k}$$

($C_1, C_2, \dots, C_k$ – действительные числа).

27. Пусть Λ – диагональная матрица с диагональными элементами $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$. В n^2- мерном пространстве матриц порядка n рассматриваются операторы:

а) $S_1(A) = \Lambda A$;

б) $S_2(A) = A\Lambda$;

в) $S(A) = \Lambda A \Lambda^{-1}$.

Найти собственные векторы и собственные значения этих операторов. (В пункте в) предполагается, что все числа λ_i отличны от нуля).

28. Доказать непосредственной выкладкой, что самосопряженный оператор в двумерном пространстве имеет собственный вектор. Опираясь на задачу 21 вывести отсюда аналогичный результат для n - мерного случая.

29. Сопряженные операторы имеют одинаковые собственные значения.

Указание: Воспользоваться тем, что согласно задаче 15

$$\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda E) = \dim \operatorname{Ker}(A'-\lambda E).$$

30. Оператор ортогонального проектирования на подпространство евклидова пространства самосопряжен.

31. Доказать, что всякий самосопряженный линейный оператор A, удовлетворяющий условию $A^2=A$, является оператором ортогонального проектирования на подпространство.

32. Оператор U называется ортогональным, если $(Ux, Ux)=(x,x)$ для любого $x \in E$. Доказать, что

а) собственными значениями ортогонального оператора могут быть лишь +I и -I.

б) Если L - инвариантное подпространство для ортогонального оператора U, то ортогональное дополнение подпространства также инвариантно относительно U.

в) В двумерном пространстве матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

(Оператор, задаваемый этой матрицей, есть поворот на угол или поворот и отражение в прямой.)

г) Найти общий вид ортогонального оператора в n - мерном евклидовом пространстве E, воспользовавшись результатом задачи 28.

33. Оператор $A'A$ самосопряжен и его собственные значения неотрицательны.

34. Линейный оператор U ортогонален тогда и только тогда, когда $U'U=E$.

34а. Матрица называется ортогональной, если сумма квадратов элементов любой строки равна I, а сумма попарных произведений соответствующих элементов любых двух разных строк равна нулю. Доказать, что оператор U ортогонален тогда и только тогда, когда его матрица в ортонормированном базисе ортогональна.

35. Если самосопряженный оператор A имеет неотрицатель-

ные собственные значения ,то найдется и притом только один самосопряженный оператор B, имеющий неотрицательные собственные значения и такой, что $B^2=\mathcal{A}$ (обозначение: $B=\sqrt{\mathcal{A}}$).

36. Любой невырожденный оператор A единственным образом представляется в виде произведения $\mathcal{A}=S\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ ортогонален, а S - самосопряжен и имеет неотрицательные собственные значения .

Указание $S=\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}'}$, $\mathcal{U}=\mathcal{A}S^{-1}$.

37. Перестановочные самосопряженные операторы имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов.

38. Пусть L и M - n - мерные подпространства R - мерного пространства. Спроектируем ортогонально вектор x из L в M , а затем снова в L . Доказать, что при этом в L получается самосопряженный оператор и его собственные значения равны $\cos^2\varphi_1$, $\cos^2\varphi_2$, ..., $\cos^2\varphi_k$, где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ - углы между L и M .

39. Найдется плоскость,пересекающая эллипсоид

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$$

по окружности .

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ.

I. Пусть A и A' - два линейных оператора, действующих в V . Доказать, что $\dim \operatorname{Im}\mathcal{A}=\dim \operatorname{Im}\mathcal{A}'$ тогда и только тогда, когда найдутся обратимые операторы C и D, такие, что $\mathcal{A}=D\mathcal{A}'C$.

2. Доказать, что для любых двух линейных операторов A и A' найдутся такие операторы D и C (уже не обязательно обратимые), что $\mathcal{A}=D\mathcal{A}'C$.

3. Дана последовательность векторных пространств

$0 \xrightarrow{A_0} V_1 \xrightarrow{A_1} V_2 \xrightarrow{A_2} V_3 \dots \xrightarrow{A_{n-1}} V_n \xrightarrow{A_n} 0$

и операторов $A_i : V_i \to V_{i+1}$, причем $\operatorname{Ker} A_i = \operatorname{Im} A_{i-1}$ (в этом случае последовательность называется точной). Доказать, что $\sum (-1)^i \dim V_i = 0$.

Замечание. Пусть A – линейный оператор в V. Последовательность

$0 \to \operatorname{Ker} A \to V \to \operatorname{Im} A \to 0$

– точная. Поэтому $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = n$, так что результат задачи 3 обобщает результат контрольной задачи I8.

4. В пространстве непрерывных функций на $[0,1]$ определен линейный оператор A, действующий по формуле

$$Af(x) = \int_0^x f(s)\,ds.$$

Доказать, что для оператора A не существует конечномерных инвариантных подпространств.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ЗАЧЕТА

"Линейные операторы; кривые, поверхности и гиперповерхности второго порядка"

В письменной части зачета были даны следующие задачи.

Вариант 1

1. Докажите, что если $A' = -A$, то все собственные значения оператора A равны нулю.*)

2. Пусть P и Q – операторы ортогонального проектирования, соответственно, на подпространства L и M и пусть $PQ = QP$. Докажите, что PQ – оператор ортогонального проектирования на $W = L \cap M$ и что подпространства L и M перпендикулярны (т.е. можно выбрать взаимно ортогональные подпространства $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ так, чтобы $L = \tilde{L} + W$, $M = \tilde{M} + W$ $(\tilde{L}, \tilde{M} \perp W)$

3.Указать какие-нибудь плоскости,которые пересекают поверхность

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

а)по окружности,б)по гиперболе,в)по параболе,г)по паре параллельных прямых,д)по паре пересекающихся прямых.Доказать,что пересечение этой поверхности с любой плоскостью непусто.

4.Привести к каноническому виду уравнение $x^2+(x+y)^2+2x+2y=0$.

Вариант 2

1.Известно,что некоторый несамосопряженный оператор A удовлетворяет условию $A' = kA + \ell E$.Какие значения могут иметь числа k и ℓ ?

2.Пусть P и Q - операторы ортогонального проектирования, соответственно,на подпространства L и M и пусть $PQ = -QP$.Доказать,что подпространства L и M ортогональны и что $P+Q$ - оператор ортогонального проектирования на $L+M$.

3.Задача 3 варианта 1 для поверхности $x^2+y^2-z^2=0$ с заменой пункта г) следующим: г) по точке.

4.Привести к каноническому виду уравнение $x^2-(x+y)^2+2x+2y=0$.

---

*) Рассматриваются линейные операторы в вещественных пространствах.

В МАТЕМАТИЧЕСКИХ КЛАССАХ ШКОЛЫ № 7

Н.Н.КОНСТАНТИНОВ

Из всех наук математика наиболее загадочна для новичка. Человек, никогда не изучавший физики, биологии или химии, знает в общих чертах, о чем там говорится. Физик мог избрать свою профессию только потому, что в детстве на него произвели большое впечатление магнит или волчок. Интерес к астрономии может зародиться при виде звездного неба. Про математику же обычно знают только, что она очень нужна для вычислений, но ведь это не дает представления о ней самой. Когда я и мои товарищи, будучи школьниками, начинали заниматься в математическом кружке при МГУ, нас очень удивило то, что математика оказалась совсем не такой, как мы ее себе представляли. Мы думали, что математика - в основном законченное здание. Конечно, мы слышали, что в математике делаются какие-то открытия, но мы думали, что они относятся лишь к очень сложным областям. А оказалось, что мы сами можем придумывать теоремы и доказательства, и, что особенно было удивительно, для того, чтобы узнать, верны ли они, не нужно лезть в книги, а нужно только подумать. Вот характерный случай, правда, уже не из моей учебы. Есть старинная задача: если множество точек на плоскости обладает тем свойством, что не существует прямой, содержащей ровно две точки множества, то либо все это множество лежит на некоторой прямой, либо в нем бесконечное число точек. Это - так называемая проблема Минелая. Она была решена в средние века довольно сложным способом. Так до последнего времени и считалось, что решение этой задачи сложное. В книге И.М.Яглома оно занимает несколько страниц(вместе с подготовительной теорией). Года два тому назад мы задали эту задачу нашим ученикам. И вскоре оказалось, что она имеет совсем простое решение,кото-

рое состоит из нескольких фраз и не требует никакой теории. Несколько человек независимо придумали это решение, но первым был, кажется, Миша Кронрод, теперь студент первого курса мех-мата. Попробуйте и вы придумать простое решение этой задачи. Странный факт, много раз проверенный: если кто-то решил задачу, для других она тем самым становится легче. Но не смотрите предварительно в книжку - вы не придумате простого своего решения, если будете знать чужое. Вот эта возможность выдумывать свое была основой нашего энтузиазма, когда мы были кружковцами. К сожалению, такая работа дает все же неточное представление о математике. Некоторые интересные и важные области этой науки становятся доступными только в результате долгого и подчас скучного ученья. В связи с этим многие считают, что нужно сначала по книжкам выучить значительную часть математики, а потом уже начинать заниматься самостоятельной творческой работой. Такая точка зрения очень естественна, и многие школьники, не участвующие в математических кружках или математических школах, пытаются учиться именно таким способом. Однако, это часто приводит к плохим результатам. При таком методе не развиваются творческие способности, и приобретенные знания оказываются в пассивной форме, они мало на что пригодны. Самое же главное, наверное, то, что ученик лишается возможности посмотреть на вещи свежими глазами. Ведь многие открытия в науке чрезвычайно просты, и было бы очень жаль, если бы люди не пытались открывать новое в давно известных вещах. Мне кажется, в последнее время вкус к простым вещам несколько утрачен. Все меньше людей, которые способны их выдумывать. Для иллюстрации расскажу об одной задаче. Дан баллон объемом 100 литров с газом под давлением 100 атм. и два баллона по 50 литров, пустых. Как с помощью простых домашних средств (без помощи насосов, сверхнизких температур и т.д.) перекачать газ из 1-го баллона в два других, не потеряв дав-

ления. Эту задачу я задавал многим физикам и математикам с высшим образованием, но сделали ее единицы. А ведь метод ее решения известен, наверное, уже 200 лет и практически применяется. Выходит, чтение сложных книг не всегда помогает разбираться в простых вещах. Аналогичные примеры можно привести и из математики. Итак, чтение книг, как способ изучения нового материала, обладает серьезными недостатками. Это относится во всяком случае к физике и математике. Как же в таком случае следует организовать изучение этих наук ? Коллектив преподавателей математики седьмой школы применяет систему обучения, которая является, на мой взгляд, шагом вперед и по отношению к системе, обычно применяемой в школе, и к университетской системе. Прежде, чем быть примененной в школе, эта система предварительно прошла испытание в нескольких математических кружках для студентов и школьников. При этой системе весь программный материал предлагается в виде задач, включая все теоремы. Объяснения учителя сводятся к минимуму. Для примера скажу, что когда я работал в 9-м классе, я за весь год объяснял новый материал в течение двух часов. Это была лекция о понятии числа, содержание которой я не смог изложить в задачах . Этой лекцией начиналась тема "действительные числа". В чем же тогда состоит работа учителя? Главным образом в том, чтобы проверять решения. Проверка решений - самая трудоемкая и самая важная часть работы. Так как один учитель не может справиться с этим, у нас в каждом классе работает несколько учителей математики.Другая функция учителей - подбирать задания и регулировать скорость прохождения материала. Скорость эта должна быть такой, чтобы все могли работать спокойно, идти в естественном темпе. При этом получается, что ученики идут с разной скоростью. В вопросах темпа мы ориентируемся по тем, кто идет медленно. Тем же, кто идет быстро, мы предлагаем дополнительные циклы задач по главам, не входящим в обязательную

программу. Такие методы могут быть эффективными, конечно, только в работе с теми учениками, которые любят решать задачи. Как же выглядит занятие при такой системе ? В классе присутствует одновременно несколько преподавателей математики, от 2-х до 5-ти в разных классах. Преподаватели тихо беседуют с учениками, которые рассказывают решенные ими задачи. За одно занятие учитель может поговорить с двумя-тремя учениками. Это несколько напоминает экзамены в университете, с тем существенным различием, что студент обычно рассказывает доказательства, которые профессор прочел на лекциях, а студент выучил, у нас же ученик рассказывает только то, что сам сделал. Другое различие состоит в том, что студент сдает определенный материал, который он обязан был изучить ко дню экзамена, у нас же ученик рассказывает то, что успел сделать. Наконец, третье различие то, что за экзамен отметка ставится, а за рассказ своего решения ученик отметки не получает. Практически никогда мы не задаем ученикам что-либо выучить, почти никогда не вызываем их к доске и ставим отметки обычно только за контрольные работы. Так что сходство с экзаменом по существу не очень большое. С другой стороны, такие занятия напоминают математический кружок.

Такие методы применяются у нас при прохождении курса алгебры - анализа. Курс геометрии и тригонометрии построен на основе обычных школьных методов с привлечением более трудных задач и некоторого дополнительного материала.

Коллектив преподавателей математики 7-йшколы накопил большой опыт работы по новой системе. Некоторые результаты этого опыта - циклы задач по анализу, алгебре, учебники по программированию - частично опубликованы и будут публиковаться, в частности, в выпусках "Математическая школа".

СПИСОК ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ АНАЛИЗА И АЛГЕБРЫ ШКОЛЫ № 7

IIв. Гутер Рафаил Самойлович, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник матем.лаб. ИТЭФ (Института Теоретической и Экспериментальной физики),

Оревков Юрий Павлович, кандидат физико-математических наук, мл.научн.сотрудник матем.лаборатории ИТЭФ.

IIг. Константинов Николай Николаевич, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник математической лаборатории ИТЭФ,

Чернавский Алексей Викторович, кандидат физико-математических наук, старший научн.сотрудник Математического Института имени А.В.Стеклова,

Калинин Дмитрий Иансвич, студент 6-го курса мехмата МГУ,

Ситникова Елена Георгиевна, студентка 6-го курса мех - мата МГУ.

Iов. Битман Александр Рафаилович, аспирант ИТЭФ,

Титов Вячеслав Константинович, аспирант ИТЭФ,

Белов Валерий Константинович, младший научный сотрудник Комитета по Кибернетике,

Емельянов Николай Евгеньевич, сотрудник математической лаборатории ИТЭФ,

Пранов Борис Михайлович (МГУ, 4 курс).

IOг. Адельсон-Вельский Георгий Маркович, кандидат физ.-мат.наук, доцент, ст.научный сотр.матем. лаб. ИТЭФ.

Леман Андрей Андреевич, аспирант ИТЭФ,

Макар-Лиманов Леонид Григорьевич, (МГУ, 4 курс).

Якобсон Михаил Викторович, студент 4-го курса мехмат. МГУ.

9в. Бернштейн Давид Наумович, студент 2-го курса мех мата МГУ,
Великанов Кирилл Михайлович, студент 2-го курса мех-мата МГУ,
Финкельберг Владлен Моисеевич, научный сотрудник ИТЭФ.
Хованский Аскольд Георгиевич, студент 2-го курса мех мата МГУ.

9г. Кушниренко Анатолий Георгиевич, студент 4-го курса мех мата МГУ,
Ротенберг Александр Робертович, отудент 3-го курса мех мата МГУ,
Киперман Вячеслав Александрович, студент 3-го курса мех мата МГУ,
Чопенко Ольга Петровна , студентка 4-го курса мех мата МГУ,
Блохин Анатолий Александрович, студент I-го курса мех-мата МГУ,
Ревзин Юрий Владимирович, учитель школы,
Осипова Виктория Аркадьевна, студентка 3-го курса мех мата МГУ.

Курс геометрии и тригонометрии ведут учителя школы
Юдина Ирина Игоревна,
Ревзин Юрий Владимирович.

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ "КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА"

ЗАДАНИЕ I.

Вычислить:

I. $\frac{i-1}{i}$ 2. $\sqrt{i+1}$ 3. $\frac{1}{i-1}$ 4. $i^{-3/2}$, 5. $\frac{a+bi}{c+di}$

6. Составить квадратное уравнение, корнем которого было бы $(i-2)$.

7. Показать, что $z+\bar{z}$ и $z\cdot\bar{z}$ – действительные числа.

8. Доказать, что $\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$;

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1\cdot z_2}$; $\overline{z_1}:\overline{z_2}=\overline{z_1:z_2}$.

9. Даны две вершины правильного треугольника: 0 и z. Найти 3-ю вершину.

IO. Даны две вершины квадрата z_1 и z_2. Найти две другие его вершины.

II. Показать, что точки, представляющие комплексные числа $1+4i$; $2+7i$; $3+10i$ лежат на одной прямой.

I2. Где расположены точки $1+2z$, если $|z|=1$?

I3. Где расположены точки z на комплексной плоскости, для которых $|z-1|=2$, $Re\,z\geq 0$, $a<Im\,z<b$?
(a, b – действительные числа).

ЗАДАНИЕ 2.

I. Представить в тригонометрической форме

а) i,

б) $\sqrt{i}$,

в) $-\cos\pi/6+i\sin\pi/6$.

2. Чему равен $arg\,\bar{z}$, если $arg\,z=\varphi$?

3. Доказать формулу Муавра.

4. Вывести формулу для извлечения корня n-й степени из

комплексного числа.

5. Чему равен $\arg \frac{z}{\bar{z}}$, если $\arg z = \varphi$?

6. Показать, что $\sqrt[n]{-1}$ имеет n различных значений. Как они расположены на комплексной плоскости?

7. Где расположены точки z такие, что $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{x}$ $(x>0)$?

8. Пусть точки z лежат на прямой . Могут ли все точки $\frac{1}{z}$ также лежать на прямой ?

9. Найти сумму $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$.

ЗАДАНИЕ 3.

I. Найти геометрическое место точек z^4, если $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

2. Чему равна сумма всех корней степени n из I ?

3. Где расположены точки $z = t z_1 + (1-t) z_2$, если z_1 и z_2 - две заданные точки и $0 \le t \le 1$ (t - действительные число)?

4. Доказать, что множество точек z, удовлетворяющих условию $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = K$, где $K \neq 1$, есть окружность.

5. Если z не равно - I и 0 , то для того, чтобы $\frac{z-1}{z+1}$ было чисто мнимым числом, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{z} = 1/z$. Доказать.

6. Вычислить: $\sin \frac{x}{m} + \sin \frac{2}{m} x + \ldots + \sin \frac{m-1}{m} x + \sin x$.

7. Выразить $\sin 4x$ и $\cos 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$ (используя формулу Муавра).

ЗАДАНИЕ 4.

I. Решить уравнение : $z^2 = \bar{z}$.

2. Доказать, что любое число на единичной окружности $(|z|=1)$, не являющееся действительным числом $(\operatorname{Im} z \neq 0)$, можно представить в виде $\frac{c-i}{c+i}$, где c - действительное число.

3. Исследовать, куда переводится единичный круг, действительная и мнимая ось, первый квадрант при следующих преобразованиях:

а) $w = az + b$; б) $w = \frac{a}{z} + b$; в) $w = z + \frac{1}{z}$;

г) $w = \frac{z+i}{z-i}$; д) $w = z \cdot \bar{z}$ (a и b - комплексные числа).

4. Если $P(z)$ - многочлен с вещественными коэффициентами, то $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$. Доказать.

5. Если $P(z) = 0$, то $P(\bar{z}) = 0$. Доказать.

6. Многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень. Доказать.

7. Доказать, что для любого многочлена $P(z)$ и любого комплексного числа a , многочлен $P(z) - P(a)$ делится на $z - a$.

8. Доказать, что многочлен $P(z)$ делится на $z - a$ в том и только в том случае, когда $P(a) = 0$.

ЗАДАНИЕ 5.

I. Доказать, что многочлен $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}$ можно разложить в произведение n линейных множителей и коэффициента при старшем члене: $P(z) = a_0 (z - z_1) \dots (z - z_n)$

2. Доказать, что многочлен с действительными коэффициентами $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ можно представить в виде:

$$P(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)(x^2 + p_1 x + q_1) \dots \dots (x^2 - p_e x + q_e).$$

3. Доказать, что каждое из разложений в предыдущих задачах единственно.

4. Доказать, что $P(z)$ делится на $z^2 + 1$ тогда и только тогда, когда $P(i) = 0$ и $P(-i) = 0$.

5. Делится ли $x^{1965}+x^{50}+1$ на x^3+1 ?

6. В каких случаях x^n+1 делится на x^m+1 ?

7. Найти все значения z , удовлетворяющие равенству $z^2+|z|=0$.

Храбро бросился i_1 на врагов. Тут подоспели i_2 и i_3 . И дрогнули супостаты. Пробили братья себе дорогу.

Пошли они дальше. Вдруг слышат страшный рев. Заметались в воздухе вихри, зарезонировало, и появилось перед ними чудище Декремент. Не растерялись братья, набросили на него сеть. Запутался Декремент своими трансцендентными ногами в узлах и издох в страшных мучениях.

Тихо стало в чисто потенциальном поле, только старый полином Лежандра шумел своими ветвями. Подошли братья к изолированной точке, разрыли корни и достали икосаэдр. Вынули они додекаэдр, извлекли детерминант и приравняли его к нулю.

Раздался тут грохот великий, потемнело небо, исчезло солнышко, полетели листья Мёбиуса, огненные разрывы молний раскололи небесную сферу Римана. Умер Иван дер Монд. И очутилась перед братьями прекрасная Резольвента, живая и невредимая, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Сказка написана для случая $n=3$. Но пользуясь методом математической индукции, читатель без труда обобщит ее на случай любого n .

Замечание 2. Сказка доступна студентам старших курсов и аспирантам механико-математических факультетов, причем знание математической логики и алгебраической топологии не требуется.

ОТ РЕДАКЦИИ. Мы предполагаем и впредь использовать свободные места в конце статей для веселых математических шуток.

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ - ИНТЕРНАТЕ № I8 (9-Е КЛАССЫ)

А.Б.СОСИНСКИЙ

Тема 5. Логарифмическая и показательная функция

Наша практическая цель - облегчить себе перемножение чисел. Для этого составим таблицу целых чисел и степеней двойки:

x	0	I	2	3	4	5	6	7	...	I2	...
2^x	I	2	4	8	I6	32	64	I28	...	4096	...

Пользуясь этой таблицей, легко перемножить числа 32 и I28. В самом деле: $32 \times I28 = 2^5 = 2^{5+7} = 2^{I2} = 4096$. При этом, не считая трехкратное пользование таблицей, мы здесь совершили лишь одно действие сложения, которое существенно проще умножения. К сожалению приведенный здесь способ умножения годиться пока только для степеней двойки (если число 32 заменить на число 33, то он уже не применим). Недостаток построенной таблицы очевиден: в нижней строчке много больших пробелов, таблицей редко можно пользоваться " снизу вверх ".

Мы сейчас предполагаем обосновать построение аналогичной таблицы, в которой пробелы можно сделать сколь угодно малыми. Это получится довольно неожиданным способом.

Введем новую функцию, "натуральный логарифм", по формуле

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{при } x>0$$

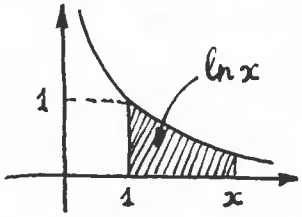
Из определения и из основных теорем анализа сразу следует

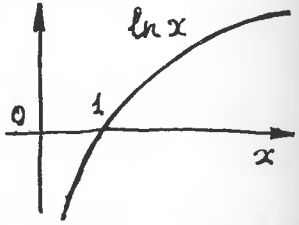
(I) функция $\ln x$ определена при $x>0$ и дифференцируема на $(0,+\infty)$, производная логарифма равна $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,

(2) $\ln x$ - строго возрастающая функция, притом $\ln x > 0$ (при $x>1$), $\ln x < 0$ при $x<1$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$,

(3) $\ln 1 = 0$.

Графически логарифм выглядит так:





Несколько менее очевидно следующее (основное) свойство:
(4) для любых положительных x и y имеем $\ln xy = \ln x + \ln y$.
Докажем сначала это свойство в частном случае, когда $y = x$
Рассмотрим функции $\ln x^2$ и $\ln x + \ln x$ и вычислим их производные:

$$(\ln x^2)' = \frac{1}{x^2}(x^2)' = 2/x$$

$$(2\ln x)' = 2 \cdot 1/x = 2/x$$

Рассмотренные функции являются первообразными одной и той же функции, поэтому $\ln x^2 = 2\ln x + k$; но $k = 0$ (подставить $x = 1$).

Для доказательства в общем случае возьмем произвольное число x и будем рассматривать $\ln xy$ как функцию от переменной y. Тогда

$$(\ln xy)'_y = \frac{1}{xy}(xy)'_y = \frac{1}{xy}x = \frac{1}{y}$$

$$(\ln x + \ln y)'_y = 0 + \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

поэтому $\ln xy = \ln x + \ln y + k$,но $k = 0$ (подставить $y = x$ и применить частный случай). Свойство доказано.
(5) Для любого рационального q и положительного x : $\ln x^q = q \ln x$. Это доказывается для произвольного q также как в случае $q = 2$ (см. выше).

В силу теорем об обратной функции и свойств I-5 логарифма у функции $\ln x$ существует единственная обратная, называемая " экспонентой " (обозначение $\exp x$), притом

(I′) функция $\exp x$ определена и дифференцируема при любом x; ее производная равна самой функции $(\exp x)' = \exp x$.

(2′) $\exp x$ строго возрастающая функция, притом

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty.$$

(3′) $\exp 0 = 1$.

(4′) $\exp x \cdot \exp y = \exp(x+y)$.

(5′) $(\exp)^q = \exp qx$ для любого рационального q.

Докажем для примера свойства (I′) и (4′))остальные свойства доказываются еще проще). Имеем по теореме о производной обратной функции

$$(\exp x)' = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \frac{1}{\frac{1}{\exp x}} = \exp x$$

т.е. (I′). Далее

$$\ln(\exp x \cdot \exp y) = \ln \exp x + \ln \exp y = x+y \quad \text{и}$$

$$\ln(\exp(x+y)) = x+y$$

откуда в силу строгой монотонности логарифма

$$\exp x \cdot \exp y = \exp(x+y) \quad \text{,т.е. } (4').$$

Таблицы для построенных нами функций $\ln x$ и $\exp x$ можно найти в любом математическом справочнике. В силу свойств (4) и (4′) их можно использовать для вычисления произведения двух чисел. Таким ооразом, умножение практически сведено к сложению.

В теме "непрерывность" мы определили число a^q посредством равенства $a^q = \sqrt[m]{a^n}$ для любого рационального $q = \frac{n}{m}$ и любого действительного $a>0$. Если выбрать определенное число $a>0$, то выражение a^q можно рассматривать как функцию $q \to a^q$, область определения которой - множество всех рациональных чисел. Заметим теперь, что

$$\exp\left(\frac{n}{m} \ln a\right) = a^{n/m}$$

поэтому естественно определить показательную функцию равенством

$$a^x = \exp(x \ln a) \qquad (a>0).$$

Ее область определения - множество всех действительных чисел.

Легко проверить, что при $a \neq 1$ a^x является строго монотонной функцией, и поэтому можно рассмотреть обратную функцию, "логарифм по основанию a", которая обозначается $\log_a x$. Тогда легко выводятся следующие свойства:

(1') $(a^x)' = (\ln a)\, a^x$ (1'') $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$

(2') a^x строго возрастает при $a>1$ и строго убывает при $a<1$ (2''') $\log_a x$ строго возрастает при $a>1$ и строго убывает при $a<1$.

(3'') $a^0 = 1$, $a^1 = a$ (3''') $\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$

(4'') $a^x a^y = a^{x+y}$ (4''') $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(5'') $(a^x)^q = a^{qx}$ для любого рационального q. (5''') $\log x^q = q \log x$ для любого рационального q.

Теперь обозначим $e = \exp 1$. Тогда

$$e^x = \exp x \ln e = \exp x,$$

т.е. экспонента является частным случаем показательной функции (при $a = e = \exp 1$). Это число e называется постоянной Эйлера, и приблизительно равно 2,71828...(сравните с лекциями Винберга из выпуска II).

Л-45035. Подписано к печати 24/1-1966г. Формат 60x90 1/16
Объем 5,75 п.л. Уч.-изд.л. 4,38. Зак. 1623. Тир. 2000. Цена 12коп.

Издательство
Московского университета
Москва, Ленинские горы
Административный корпус
Типография Изд-ва МГУ
Москва, Ленинские горы.